ПОСОБИЕ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ

Математический анализ

Модуль 1 · разбор 35 вопросов из списка 2027

Как работать с пособием

Твоя задача на модуле — не воспроизвести чужой текст, а объяснить, **о каких объектах идёт речь, что утверждается, при каких условиях и почему**. Поэтому у каждого из 35 вопросов один порядок: понятная идея, точная формулировка, доказательство, пример и самопроверка. Названия и номера сохранены из списка вопросов.

Первый проход — разобраться. Прочитай «Сначала поймём», затем «Как ответить на модуле» и пример. В непонятной формуле сначала назови словами каждую букву. После этого вернись к доказательству: попробуй объяснить назначение каждого шага. Если в доказательстве числа e встретится непривычная сумма или произведение, посмотри следующий раздел «Язык формул».

Второй проход — восстановить без текста. Закрой ответ и проговори определение или теорему. Назови условия. Восстанови доказательство по строке «Опора для устного ответа». Затем реши две задачи самопроверки. В электронной версии ответы раскрываются отдельно; в PDF они стоят ниже вопросов, поэтому сначала закрой их рукой или листом.

Третий проход — смешать темы. Возьми несколько несоседних вопросов. Особенно полезно поставить рядом похожие понятия: ограниченность и сходимость; предел функции и непрерывность; обычную и равномерную непрерывность. Если можешь объяснить различие на примере, определение стало рабочим инструментом.

Не нужно одинаково подробно отвечать на всё сразу. Начни с блока «Как ответить на модуле», а доказательство расскажи следующей частью. Только у вопроса 1 в официальном списке прямо написано «без доказательства» для теоремы Дедекинда. Для остальных теорем доказательства здесь приведены, чтобы ты мог их восстановить, если преподаватель попросит.

Как устроен весь модуль

- **1–7.** Учимся говорить о границах и приближении чисел. Основа — точные грани и определение предела.
- **8–15.** Учимся доказывать, что предел существует, даже если его значение ещё неизвестно: монотонность, вложенные отрезки, подпоследовательности, критерий Коши.
- **16–23.** Переносим идею предела с номера n на аргумент функции x. Получаем замечательные пределы и сравнение скоростей приближения.
- **24–29.** Сравниваем предел функции с её значением в точке. Получаем непрерывность, разрывы и свойства монотонных функций.

- **30–35.** Изучаем поведение непрерывной функции на всём промежутке: обратимость, промежуточные значения, максимум и минимум, равномерную непрерывность.

Порядок вопросов — порядок официального списка, но не всегда порядок доказательств. Для логарифмических следствий в №21 нужна непрерывность элементарных функций из №31. В №31 она обоснована независимо от этих следствий. Теорема об обратной функции в №30 использует промежуточные значения из №32. Такие ссылки не означают, что нужно заранее знать ответ наизусть: при первом чтении достаточно открыть указанное обоснование.

Язык формул: прочитать, а не заучить

Числа, множества и расстояние

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ — натуральные числа. $\mathbb{Z}$ — целые числа. $\mathbb{Q}$ — рациональные числа, то есть дроби p/q с целым p и натуральным q. $\mathbb{R}$ — действительные числа: вся числовая прямая. Здесь 0 не входит в $\mathbb{N}$.

$x \in A$ читается «x принадлежит множеству A». Запись $A \subseteq B$ означает: каждый элемент A входит в B. Отрезок $[a, b]$ включает концы, интервал (a, b) — нет. Записи $[a, b)$ и $(a, b]$ включают только один конец. В некоторых русских записях между концами стоит точка с запятой: смысл тот же.

Модуль $|x - a|$ — расстояние между числами x и a. Поэтому условие

$$|x - a| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$$

означает: x находится ближе, чем на ε, к a. Буква ε («эпсилон») обозначает положительный допуск ошибки. Она **не означает** какое-то таинственное бесконечно маленькое число. Можно взять 0,1, потом 0,001, потом любой меньший положительный допуск.

Окрестность точки a радиуса $\delta > 0$ — интервал $(a - \delta, a + \delta)$. Буква δ читается «дельта». **Проколотая окрестность** — та же окрестность без самой точки a: $0 < |x - a| < \delta$. Прокол нужен для предела: нас интересуют значения рядом с точкой, а не в ней.

«Для любого» и «существует»: порядок решает всё

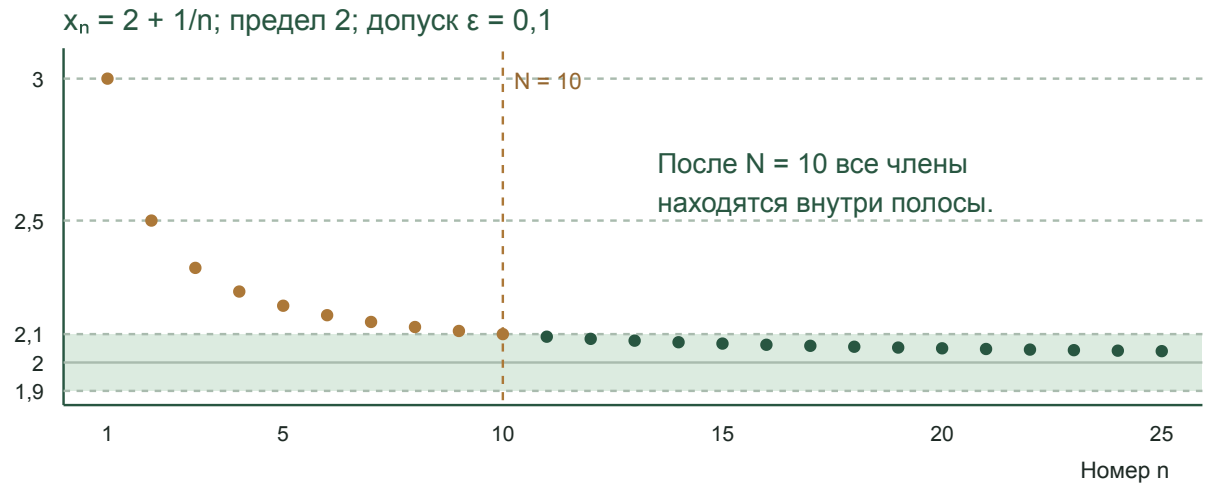
$\forall$ означает «для любого», $\exists$ — «существует». Их нельзя переставлять как слагаемые. Фраза «для каждого человека найдётся подходящий размер обуви» не утверждает, что один размер подойдёт всем людям. Так и в математике: число, выбранное после другого, может от него зависеть.

Определение $x_n \to a$ читается слева направо:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Сначала задают **любой** положительный допуск ε. Затем ты выбираешь номер N, возможно зависящий от этого допуска. После этого **все** члены с номерами $n > N$ должны попасть в нужный интервал вокруг a. Найти один подходящий член недостаточно. Даже бесконечно много подходящих членов недостаточно, если между ними остаются неподходящие.

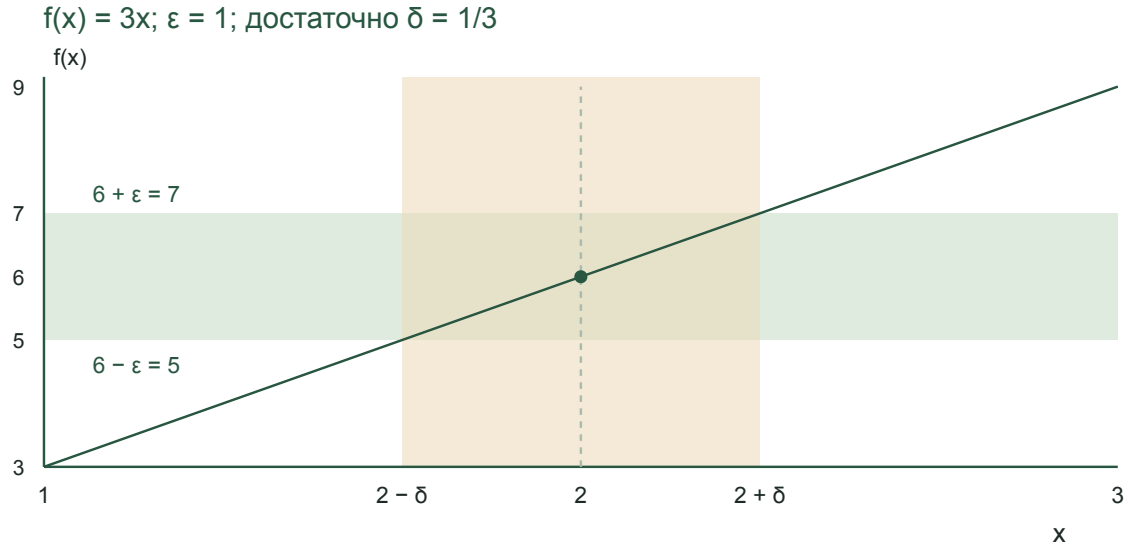
Например, для $x_n = 2 + 1/n$ расстояние до 2 равно $1/n$. При $\varepsilon = 0{,}01$ можно выбрать $N = 100$: если $n > 100$, то $1/n < 0{,}01$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ можно взять натуральное $N \geq 1/\varepsilon$. Именно работа с произвольным допуском доказывает предел. **Хвост последовательности** — все её члены после выбранного номера; конечное начало — остальные.



У функции роль N играет δ:

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - b| < \varepsilon.$$

ε ограничивает ошибку **результата**, а δ — допустимое отклонение **аргумента**. Например, для $f(x) = 3x$ около $a = 2$ хотим приблизить результат к $b = 6$. Поскольку $|3x - 6| = 3|x - 2|$, достаточно выбрать $\delta = \varepsilon/3$.



Когда нужно опровергнуть определение

Чтобы доказать предел, нужно справиться с каждым положительным допуском. Чтобы опровергнуть его, достаточно найти **один** допуск, с которым невозможно справиться на всём хвосте:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N : \quad |x_n - a| \geq \varepsilon_0.$$

То есть как далеко ни уйди, найдётся ещё один нарушитель. Так устроены доказательства от противного в вопросах 17, 18 и 35. В №35 нарушителем будет пара близких аргументов с заметно различающимися значениями функции.

Три приёма, которые постоянно встречаются

Разбить ошибку. Неравенство треугольника утверждает $|u + v| \leq |u| + |v|$. Поэтому

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z|.$$

Путь через промежуточную точку не короче прямого расстояния. Если каждая из двух ошибок меньше $\varepsilon/2$, общая ошибка меньше ε. Вот почему $\varepsilon/2$ появляется так часто: мы делим доступную ошибку на две части. Для трёх частей можно взять $\varepsilon/3$.

Выполнить два условия сразу. Если одно свойство верно при $n > N_1$, другое при $n > N_2$, бери $N = \max\{N_1, N_2\}$. Для окрестностей наоборот: чтобы попасть сразу в две, бери $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Временно держаться рядом. В оценке $|x^2 - a^2| = |x - a||x + a|$ второй множитель меняется. Сначала потребуй $|x - a| < 1$. Тогда $|x + a| \leq |x - a| + 2|a| < 1 + 2|a|$. Теперь можно взять

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{1 + 2|a|}\right\}.$$

Число 1 не волшебное: это удобная фиксированная окрестность, в которой второй множитель уже контролируется.

Суммы, произведения и формулы для числа e

Знак $\sum$ сокращает сумму: $\sum_{k=1}^{3} a_k = a_1 + a_2 + a_3$. Знак $\prod$ сокращает произведение: $\prod_{k=1}^{3} a_k = a_1 a_2 a_3$. Индекс k просто перебирает указанные целые значения. Сумму без слагаемых считают равной нулю, произведение без множителей — единице: так общие формулы работают и в крайних случаях.

Факториал $m! = 1 \cdot 2 \cdots m$, например $4! = 24$; по соглашению $0! = 1$. **Бином Ньютона** — формула раскрытия целой степени:

$$(1 + t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k, \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Например, при $n = 3$ получаем $(1 + t)^3 = 1 + 3t + 3t^2 + t^3$. Коэффициент $\binom{n}{k}$ считает, сколькими способами можно выбрать k множителей, из которых при раскрытии скобок берётся t. Это объясняет формулу: каждый способ даёт одно слагаемое t^k.

Геометрическая прогрессия умножает каждый член на одно и то же число q. Для $|q| < 1$ её частичные суммы имеют предел:

$$\sum_{k=1}^{m} q^k = \frac{q(1 - q^m)}{1 - q}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1 - q}.$$

Бесконечная сумма означает предел конечных сумм, а не действие с «последним» слагаемым. Конечная формула получается вычитанием q-кратной суммы из самой суммы. Поскольку $q^m \to 0$, получаем вторую формулу. При $q = 1/2$ это знакомое $1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots = 1$.

Неравенство Бернулли для целого $n \geq 1$ и $t \geq -1$:

$$(1 + t)^n \geq 1 + nt.$$

При $n = 1$ равенство. Если утверждение верно для n, умножим на неотрицательное $1 + t$: $(1 + t)^{n+1} \geq (1 + nt)(1 + t) = 1 + (n + 1)t + nt^2 \geq 1 + (n + 1)t$. Это индукция: база и переход доказывают утверждение для всех натуральных n.

Короткий словарь остальных слов

- **Необходимое условие** обязано выполняться, когда есть свойство. Сходимость требует ограниченности.
- **Достаточное условие** гарантирует свойство. Монотонность вместе с нужной ограниченностью гарантирует сходимость.
- **Критерий** даёт оба направления: свойство есть тогда и только тогда, когда выполнено условие.
- **Контрпример** — один пример, который опровергает общее утверждение. Последовательность $(-1)^n$ опровергает «всякая ограниченная последовательность сходится».
- **Образ функции** $f(X)$ — все значения, которые функция действительно принимает при аргументах из X.
- **Полнота** $\mathbb{R}$ — отсутствие числовых «дыр», нужное для существования точных граней и пределов фундаментальных последовательностей. Внутри одних рациональных чисел аналогичные утверждения могут не работать.
- Для множества в $\mathbb{R}$ **компактность** равносильна замкнутости и ограниченности. Отрезок $[a, b]$ — основной пример. Равносильное свойство: из любой последовательности точек множества можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к точке этого же множества. Именно это свойство используется в доказательствах.

Словарь — опора для чтения. Точные определения и условия в каждом вопросе остаются обязательными.

Оглавление

1. Грани числовых множеств. Примеры. Теорема Дедекинда (без доказательства).
2. Бесконечно малые последовательности. Примеры. Свойства бесконечно малых последовательностей.
3. Бесконечно большие последовательности. Примеры. Связь между бесконечно большой и бесконечно малой последовательностями.
4. Предел последовательности. Примеры.
5. Свойства сходящихся последовательностей.
6. Арифметические действия над сходящимися последовательностями.
7. Свойства сходящихся последовательностей, выраженные неравенствами.
8. Монотонные последовательности. Теорема о сходимости монотонной ограниченной последовательности. Примеры.
9. Число e.
10. Приближенное вычисление числа e.
11. Теорема о вложенных отрезках.
12. Подпоследовательности. Частные пределы. Примеры.
13. Теорема Больцано-Вейерштрасса.
14. Фундаментальные последовательности и их свойства.
15. Необходимое и достаточное условия Коши для сходимости последовательностей. Примеры.
16. Понятие предельной точки. Предел функции по Коши и по Гейне. Примеры.
17. Эквивалентность определений пределов функции по Коши и по Гейне.
18. Необходимое и достаточное условие Коши для существования предела функции.
19. Арифметические действия над функциями, имеющими пределы.
20. Первый замечательный предел.
21. Второй замечательный предел. Следствия.
22. Бесконечно малые и большие функции и их классификация. Примеры.
23. Односторонние пределы функции. Примеры.
24. Непрерывность функции. Примеры.
25. Односторонняя непрерывность функции. Примеры.
26. Точки разрыва функции и их классификация. Примеры.
27. Арифметические действия над непрерывными функциями.
28. Сложная функция. Непрерывность сложной функции.
29. Монотонные функции, теорема о существовании предела монотонной функции. Теорема о разрывах монотонной функции.
30. Обратная функция. Непрерывность обратной функции.
31. Непрерывность элементарных функций.
32. Первая теорема Больцано-Коши. Вторая теорема Больцано-Коши. Следствие.
33. Первая теорема Вейерштрасса. Вторая теорема Вейерштрасса.
34. Равномерная непрерывность. Примеры.
35. Теорема Кантора.

1. Грани числовых множеств. Примеры. Теорема Дедекинда (без доказательства).

Сначала поймём

Общая граница ограничивает сразу все числа множества. Например, числа из интервала $(1;2)$ меньше и 2, и 10. Но 2 — самая точная верхняя граница: если её уменьшить, часть чисел окажется выше. При этом само 2 в интервал не входит. Поэтому границу и наибольший элемент нельзя смешивать.

Множество A — рассматриваемый набор действительных чисел; $x \in A$ означает, что число x в него входит. Запись $\sup A$ читается «супремум множества A», а $\inf A$ — «инфимум множества A».

Как ответить на модуле

Число M — верхняя грань множества A, если $x \le M$ для каждого $x \in A$. Число m — нижняя грань, если $x \ge m$ для каждого $x \in A$. Множество ограничено, когда оно ограничено с обеих сторон; равносильно, существует $K > 0$ такое, что $|x| \le K$ для всех $x \in A$.

Супремум $\sup A$ — наименьшая верхняя грань, инфимум $\inf A$ — наибольшая нижняя грань. Максимум и минимум обязаны принадлежать A. Если супремум принадлежит множеству, он является максимумом; аналогично для инфимума и минимума.

Теорема Дедекинда. Всякое непустое множество действительных чисел, ограниченное сверху, имеет действительную точную верхнюю грань. Всякое непустое множество действительных чисел, ограниченное снизу, имеет действительную точную нижнюю грань. Доказательство теоремы не требуется.

Почему это верно

Для проверки $M = \sup A$ нужны два условия: все элементы не больше M, а для любого $\varepsilon > 0$ найдётся элемент $x \in A$ с $x > M - \varepsilon$. Здесь ε — произвольное положительное расстояние. В самом деле, если M — наименьшая верхняя грань, то $M - \varepsilon$ уже не верхняя грань, значит, такой элемент найдётся. Обратно, если оба условия выполнены и есть верхняя грань $c < M$, выберем $\varepsilon = M - c$. Тогда найдётся $x > c$, что противоречит определению верхней грани.

Аналогично $m = \inf A$ тогда и только тогда, когда все элементы не меньше m и для любого $\varepsilon > 0$ некоторый элемент меньше $m + \varepsilon$. Действительно, если m — наибольшая нижняя грань, то $m + \varepsilon$ уже не нижняя грань, поэтому найдётся элемент меньше неё. Обратно, если оба условия выполнены, но есть нижняя грань $c > m$, выбор $\varepsilon = c - m$ даст элемент меньше c, противоречие.

Пример с разбором

Пусть $A = (1;2]$. Все элементы больше 1 и не больше 2. Поскольку $2 \in A$, получаем $\sup A = \max A = 2$. Число 1 — нижняя грань; при любом $\varepsilon > 0$ элемент $1 + \min\{\varepsilon/2, 1/2\}$ принадлежит A и меньше $1 + \varepsilon$. Значит, $\inf A = 1$. Минимума нет: $1 \notin A$, а инфимум — единственный возможный минимум.

Где легко ошибиться

- Супремум не обязан принадлежать множеству: у $(1;2)$ он равен 2, но максимума нет.
- Верхняя грань 10 для $(1;2)$ существует, но не является точной: 2 тоже верхняя грань и меньше 10.
- В теореме Дедекинда нельзя пропустить непустоту или требуемую ограниченность.

Проверь себя

1. Найдите инфимум, супремум, минимум и максимум $[0;3)$.
2. Почему факт, что 5 — верхняя грань множества, ещё не доказывает, что 5 — его супремум?

> **▼ Ответы для проверки**
>
> 1. $\inf A = \min A = 0$, $\sup A = 3$; максимума нет, поскольку $3 \notin A$.
> 2. Может существовать меньшая верхняя грань. Дополнительно нужно показать, что ниже 5 верхней грани уже нет.

Опора для устного ответа

Общие грани → точные грани и крайние элементы → условия Дедекинда → пример.

2. Бесконечно малые последовательности. Примеры. Свойства бесконечно малых последовательностей.

Сначала поймём

Последовательность — числа, занумерованные натуральными номерами: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. Бесконечно малая последовательность имеет весь достаточно поздний хвост сколь угодно близко к нулю. Номер, с которого начинается подходящий хвост, зависит от выбранного допуска. Маленькое постоянное число не обладает этим свойством: можно потребовать ещё меньший допуск. Например, постоянная последовательность 0,000001 не бесконечно мала: при $\varepsilon = 0{,}0000001$ ни один её член не попадает в допуск.

Как ответить на модуле

Последовательность (α_n) называется бесконечно малой, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n > N : \quad |\alpha_n| < \varepsilon.$$

Здесь ε — произвольная положительная точность, а N — подходящий порог номера. Примеры: $1/n$, $(-1)^n/n$ и нулевая последовательность.

Свойства: всякая бесконечно малая последовательность ограничена; сумма любого фиксированного конечного числа бесконечно малых последовательностей бесконечно мала; произведение бесконечно малой на ограниченную последовательность бесконечно мало. Следовательно, бесконечно малы разность, произведение двух бесконечно малых и произведение бесконечно малой на постоянное число.

Почему это верно

Ограниченность. Возьмём $\varepsilon = 1$. Существует N, после которого $|\alpha_n| < 1$. Остаются первые N членов: их конечное число, поэтому можно выбрать

$$M = \max\{1, |\alpha_1|, \ldots, |\alpha_N|\}.$$

Тогда $|\alpha_n| \le M$ и для начальных членов, и для хвоста.

Сумма. Пусть $\alpha_n^{(1)}, \ldots, \alpha_n^{(k)}$ бесконечно малы и число k фиксировано. Для заданного $\varepsilon > 0$ каждому слагаемому выделим допуск ε/k. Существуют пороги $N_1, \ldots, N_k$, после которых соответственно $|\alpha_n^{(j)}| < \varepsilon/k$. При $N = \max\{N_1, \ldots, N_k\}$ все оценки действуют одновременно, и по неравенству треугольника

$$\left| \sum_{j=1}^{k} \alpha_n^{(j)} \right| \le \sum_{j=1}^{k} |\alpha_n^{(j)}| < k \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.$$

Произведение. Пусть $|\beta_n| \le M$ для всех n, где $M > 0$; даже для нулевой последовательности можно взять $M = 1$. Для заданного ε выберем порог, после которого $|\alpha_n| < \varepsilon/M$. Тогда $|\alpha_n \beta_n| \le M|\alpha_n| < \varepsilon$.

Постоянная последовательность ограничена, поэтому можно умножать на постоянное число и менять знак. Вторая бесконечно малая ограничена по уже доказанному, поэтому произведение двух таких последовательностей тоже бесконечно мало; разность получается сложением с противоположной последовательностью.

Пример с разбором

Для $\alpha_n = (2 + (-1)^n)/n$ числитель по модулю не больше 3, поэтому $|\alpha_n| \le 3/n$. При любом $\varepsilon > 0$ выберем натуральное $N > 3/\varepsilon$. Для всех $n > N$ имеем $|\alpha_n| \le 3/n < \varepsilon$. Значит, последовательность бесконечно мала, хотя её значения колеблются.

Где легко ошибиться

- Нельзя умножать бесконечно малую на произвольную последовательность: $(1/n) \cdot n = 1$.
- Теорема о сумме требует фиксированного числа слагаемых. Например, для каждого фиксированного k последовательность $\alpha_n^{(k)} = 1/n$ бесконечно мала, но сумма первых n таких последовательностей равна $\sum_{k=1}^{n} 1/n = 1$ и не стремится к нулю.
- Один подходящий член ещё не даёт подходящего хвоста: условие должно выполняться для всех $n > N$.

Проверь себя

1. Почему последовательность $0{,}001, 0{,}001, \ldots$ не бесконечно мала?
2. Докажите бесконечную малость $5/n$, выбрав порог для произвольного $\varepsilon > 0$.

> ▼ **Ответы для проверки**
>
> 1. При $\varepsilon = 0{,}0001$ ни один член не удовлетворяет требованию $|\alpha_n| < \varepsilon$.
> 2. Возьмите натуральное $N \ge 5/\varepsilon$. При $n > N$ выполняется $5/n < \varepsilon$.

Опора для устного ответа

Определение хвоста → ограниченность с конечным началом → сумма с ε/k → произведение с ε/M.

3. Бесконечно большие последовательности. Примеры. Связь между бесконечно большой и бесконечно малой последовательностями.

Сначала поймём

Бесконечно большая последовательность в конце концов выходит по модулю за любой заданный порог и больше не возвращается. Модуль измеряет расстояние от нуля, поэтому знаки могут чередоваться. При обращении большого ненулевого числа получается малое число; обращение малых ненулевых чисел действует в обратную сторону.

Как ответить на модуле

Последовательность (x_n) бесконечно большая, если

$$\forall E > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n > N : \quad |x_n| > E.$$

Например, n, n^2 и $(-1)^n n$ бесконечно большие. Всякая бесконечно большая последовательность не ограничена, но не всякая неограниченная бесконечно большая.

Если α_n бесконечно мала и ненулевая начиная с некоторого номера, то $1/\alpha_n$ на этом хвосте бесконечно большая. Обратно, если x_n бесконечно большая, то она ненулевая на некотором хвосте и $1/x_n$ там бесконечно мала. При необходимости конечное начало обратной последовательности задают отдельно: оно не влияет на свойство хвоста.

Почему это верно

Если бы бесконечно большая последовательность была ограничена числом $M > 0$, то при всех n выполнялось бы $|x_n| \le M$. Но определение с порогом $E = M$ даёт $|x_n| > M$ на некотором хвосте. Получили противоречие.

Пусть α_n бесконечно мала и $\alpha_n \neq 0$ при $n > N_0$. Для любого $E > 0$ выберем по определению малости порог N_1 для точности $1/E$. При $n > \max\{N_0, N_1\}$ имеем $0 < |\alpha_n| < 1/E$, откуда $|1/\alpha_n| > E$. Это определение бесконечно большой последовательности.

Теперь пусть x_n бесконечно большая. При $E = 1$ получаем ненулевой хвост после некоторого N_0. Для любой точности $\varepsilon > 0$ применим определение с порогом $E = 1/\varepsilon$ и получим номер N_1. При $n > \max\{N_0, N_1\}$ имеем $|x_n| > 1/\varepsilon$, а значит, $|1/x_n| < \varepsilon$. Обратная последовательность бесконечно мала.

Пример с разбором

Пусть $x_n = (-1)^n n^2$. Тогда $|x_n| = n^2$. Для любого $E > 0$ достаточно натурального $N > \sqrt{E}$: при $n > N$ модуль больше E. Обратная последовательность $1/x_n = (-1)^n/n^2$ бесконечно мала. Смена знака не мешает росту модуля.

Где легко ошибиться

- Неограниченность слабее: если $x_{2k} = 2k$, а $x_{2k-1} = 0$, сколь угодно большие члены есть, но в каждом хвосте остаются нули.

- Обращение требует ненулевого хвоста. Бесконечно малая последовательность с бесконечно многими нулями не даёт определённой обратной на всём хвосте.
- Бесконечно большой модуль не означает стремление к $+\infty$: знаки могут чередоваться.

Проверь себя

1. Бесконечно ли большая последовательность $-n$?
2. Можно ли обратить последовательность, равную $1/n$ на чётных номерах и 0 на нечётных?

> **▼ Ответы для проверки**
>
> 1. Да: $|-n| = n$ выходит за любой положительный порог.
> 2. На всём хвосте нет: нули встречаются после любого номера, хотя сама последовательность бесконечно мала.

Опора для устного ответа

Порог по модулю → отличие от неограниченности → ненулевой хвост → взаимные оценки $1/E$ и $1/\varepsilon$.

4. Предел последовательности. Примеры.

Сначала поймём

Предел — число, около которого остаётся весь достаточно поздний хвост последовательности. Не требуется, чтобы каждый следующий член был ближе предыдущего или чтобы последовательность когда-нибудь достигла предела. Важно, что для любого допуска все члены после подходящего номера находятся внутри него.

Как ответить на модуле

Число $a \in \mathbb{R}$ называется пределом последовательности (x_n), если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n > N : \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Пишут $x_n \to a$ или $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Выражение $|x_n - a|$ — расстояние от члена до предполагаемого предела. Последовательность, имеющая конечный предел, называется сходящейся.

Равносильно, $x_n = a + \alpha_n$, где α_n бесконечно мала. Например, $1/n \to 0$, $2 + 1/n \to 2$, постоянная последовательность c сходится к c. Последовательность $(-1)^n$ не сходится: она продолжает принимать два разных значения. Отсутствие конечного предела называется расходимостью; к ней относят и стремление к бесконечности.

Отрицание утверждения «a — предел» означает: существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что после любого порога N найдётся номер $n > N$ с $|x_n - a| \geq \varepsilon_0$. Чтобы доказать расходимость, нужно исключить каждый возможный конечный предел, а не только один кандидат.

Почему это верно

Если $x_n \to a$, то для любого $\varepsilon > 0$ после некоторого номера $|x_n - a| < \varepsilon$. Положим $\alpha_n = x_n - a$. Это в точности определение бесконечной малости α_n, а $x_n = a + \alpha_n$.

Обратно, если $x_n = a + \alpha_n$ и α_n бесконечно мала, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер, после которого $|x_n - a| = |\alpha_n| < \varepsilon$. Следовательно, $x_n \to a$.

Почему $(-1)^n$ не сходится? В любом хвосте есть и чётные, и нечётные номера, поэтому там встречаются 1 и -1. Если бы пределом было число a, то при $\varepsilon = 1/2$ оба значения оказались бы от него на расстоянии меньше $1/2$. Тогда неравенство треугольника дало бы $2 = |1 - (-1)| < 1$, противоречие. Значит, ни одно a не является пределом.

Для постоянной последовательности $x_n = c$ расстояние $|x_n - c| = 0$ меньше любого положительного ε при всех номерах, поэтому годится любой натуральный порог.

Пример с разбором

Докажем $x_n = 2 + 1/n \to 2$. Для заданного $\varepsilon > 0$ возьмём натуральное $N \geq 1/\varepsilon$. При каждом $n > N$ имеем

$$|x_n - 2| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Например, при $\varepsilon = 0{,}1$ можно взять $N = 10$: номер 10 сам на границе допуска, но он не входит в хвост $n > N$.

Где легко ошибиться

- Номер N выбирается после задания ε, но затем подходит сразу всем $n > N$.
- Предел не обязан быть одним из членов: в примере $2 + 1/n$ никогда не равно 2.
- Численные примеры близости не заменяют доказательство для всякого положительного допуска.

Проверь себя

1. Может ли последовательность пересекать свой предел бесконечно много раз и сходиться к нему?
2. Выберите порог для доказательства $3 - 4/n \to 3$.

> ▼ **Ответы для проверки**
>
> 1. Да: $(-1)^n/n$ попеременно положительна и отрицательна, но её модуль стремится к нулю.
> 2. Для заданного $\varepsilon > 0$ достаточно натурального $N \geq 4/\varepsilon$: тогда $|3 - 4/n - 3| = 4/n < \varepsilon$ при $n > N$.

Опора для устного ответа

Произвольный допуск → один порог для всего хвоста → отклонение бесконечно мало → пример.

5. Свойства сходящихся последовательностей.

Сначала поймём

Сходимость накладывает ограничения на всю последовательность. Далёкий хвост помещается около предела, а конечное начало можно ограничить отдельно. Один и тот же хвост не может при любой точности оставаться около двух разных чисел. Если предел отличен от нуля, то достаточно поздние члены сохраняют его знак и отделены от нуля.

Как ответить на модуле

Если действительная последовательность x_n сходится к конечному пределу a, то её предел единственен и сама последовательность ограничена. Если $a \neq 0$, существуют $c > 0$ и номер N, такие что при всех $n > N$ выполняется $|x_n| \geq c$; в частности, эти члены ненулевые и имеют знак a. Изменение конечного числа членов не меняет предел. Любая подпоследовательность сходится к тому же пределу. Обратное к ограниченности неверно: $(-1)^n$ ограничена, но не сходится.

Почему это верно

Единственность. Пусть одновременно $x_n \to a$ и $x_n \to b$, причём $a \neq b$. Возьмём $\varepsilon = |a-b|/2 > 0$. После общего порога для обоих пределов

$$|a-b| \leq |a-x_n| + |x_n-b| < \frac{|a-b|}{2} + \frac{|a-b|}{2} = |a-b|.$$

Противоречие доказывает $a = b$.

Ограниченность. Для точности 1 найдётся N с $|x_n - a| < 1$ при $n > N$. По неравенству треугольника $|x_n| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|$. Определим

$$M = \max\{1 + |a|, |x_1|, \ldots, |x_N|\}.$$

Тогда $|x_n| \leq M$ при всех номерах: отдельно учтено конечное начало.

Отделённость от нуля и знак. Если $a \neq 0$, выберем $\varepsilon = |a|/2$. После соответствующего порога $|x_n - a| < |a|/2$. Из $|a| \leq |a - x_n| + |x_n|$ следует $|x_n| > |a|/2$. Значит, подходит $c = |a|/2$. Если $a > 0$, то $x_n > a - a/2 = a/2 > 0$; если $a < 0$, то $x_n < a + |a|/2 = a/2 < 0$.

Конечное изменение. Пусть новая последовательность совпадает с исходной после номера N_0. Для заданного $\varepsilon > 0$ найдём порог N_1 исходной последовательности. После $\max\{N_0, N_1\}$ новая последовательность совпадает с исходной и находится на расстоянии меньше ε от a. Поэтому предел сохранился.

Подпоследовательность. Пусть x_{n_k} получена из членов с натуральными номерами $n_1 < n_2 < \cdots$. Тогда $n_k \geq k$. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем порог N исходной последовательности. При $k > N$ имеем $n_k > N$, значит, $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$. Поэтому $x_{n_k} \to a$.

Пример с разбором

Для $x_n = 2 + (-1)^n/n$ отклонение от 2 по модулю равно $1/n$, значит, $x_n \to 2$. При $n > 1$ имеем $|x_n| > 1$: хвост отделён от нуля. Ограниченность видна и непосредственно: $1 \le x_n \le 3$.

Где легко ошибиться

- Ограниченность не гарантирует сходимость: $(-1)^n$ чередует два значения.
- Если предел равен нулю, общей положительной границы от нуля может не быть: $1/n \to 0$.
- При доказательстве ограниченности нельзя забывать первые члены, которые могут быть большими.

Проверь себя

1. Может ли сходящаяся последовательность иметь два разных предела?
2. Почему ненулевость каждого члена не гарантирует отделённости от нуля?

> ▼ **Ответы для проверки**
>
> 1. Нет: окрестности двух разных пределов радиуса в половину расстояния между ними не допускают общего хвоста.
> 2. Например, все $1/n$ ненулевые, но для любого $c > 0$ найдутся члены меньше c.

Опора для устного ответа

Единственность через половину расстояния → хвост и конечное начало → отделённость при ненулевом пределе → подпоследовательность.

6. Арифметические действия над сходящимися последовательностями.

Сначала поймём

Чтобы найти предел суммы или произведения, достаточно знать конечные пределы составляющих. Деление требует большей осторожности: знаменатель не должен приближаться к нулю, иначе малая ошибка может стать большой. Удобно представлять каждый член как его предел плюс исчезающее отклонение.

Как ответить на модуле

Пусть $x_n \to a$ и $y_n \to b$, где a, b конечны, а c — постоянное число. Тогда

$$\lim(cx_n) = ca,$$
$$\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b,$$
$$\lim(x_n y_n) = ab.$$

Если дополнительно $b \neq 0$, то знаменатель ненулевой начиная с некоторого номера и

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

Частное рассматривается на этом хвосте; конечное начало можно определить произвольно, если там встречаются нули. Если $b = 0$, приведённое правило частного неприменимо, и выражение требует отдельного исследования.

Почему это верно

Положим $\alpha_n = x_n - a$ и $\beta_n = y_n - b$. Обе последовательности бесконечно малы. Для постоянного множителя отклонение равно $cx_n - ca = c\alpha_n$, а для суммы и разности

$$(x_n \pm y_n) - (a \pm b) = \alpha_n \pm \beta_n.$$

Эти отклонения бесконечно малы по свойствам из вопроса 2. Следовательно, соответствующие пределы доказаны.

Для произведения раскроем все слагаемые:

$$x_n y_n - ab = b\alpha_n + a\beta_n + \alpha_n\beta_n.$$

Первые два слагаемых бесконечно малы как произведения на постоянные. Третье тоже бесконечно мало, поскольку β_n ограничена. Конечная сумма бесконечно малых бесконечно мала.

Для частного сначала обеспечим безопасность деления. При $b \neq 0$ выберем в определении $y_n \to b$ точность $|b|/2$. После некоторого номера

$$|y_n| \geq |b| - |y_n - b| > \frac{|b|}{2} > 0.$$

Следовательно, знаменатель отделён от нуля. При таких номерах

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{b\alpha_n - a\beta_n}{by_n}.$$

Числитель бесконечно мал как разность бесконечно малых. Обратный множитель ограничен: $|1/(by_n)| < 2/|b|^2$. Задав его на конечном начале, например, нулями, получим ограниченную последовательность. Её произведение с числителем бесконечно мало, значит, отклонение частного от a/b стремится к нулю.

Пример с разбором

Для $n \geq 1$ преобразуем

$$\frac{2n+1}{3n-1} = \frac{2 + 1/n}{3 - 1/n}.$$

Поскольку $1/n \to 0$, числитель стремится к 2, а знаменатель к $3 \neq 0$. Поэтому по теореме частного предел равен $2/3$.

Где легко ошибиться

- Ненулевые знаменатели не заменяют условие $b \neq 0$: например, $1/n \neq 0$, но $1/(1/n) = n$ не имеет конечного предела.
- При нулевом пределе знаменателя теорема не утверждает отсутствие предела: $(1/n)/(1/n) = 1$.
- Для произведения нужно учесть все слагаемые отклонения, включая $\alpha_n\beta_n$.

Проверь себя

1. Если $x_n \to 3$ и $y_n \to 2$, найдите предел $(x_n + 2y_n)/(y_n + 2)$.
2. Почему при $y_n \to 0$ нельзя вычислить предел частного делением пределов?

> ▼ **Ответы для проверки**
>
> 1. Числитель стремится к 7, знаменатель к $4 \neq 0$, значит, предел равен $7/4$.
> 2. На ноль делить нельзя, а поведение отношения зависит от последовательностей: $(1/n)/(1/n) = 1$, тогда как $(1/n^2)/(1/n) = 1/n \to 0$.

Опора для устного ответа

Отклонения от пределов → сумма и произведение малых → знаменатель отделён от нуля → оценка ошибки частного.

7. Свойства сходящихся последовательностей, выраженные неравенствами.

Сначала поймём

Если члены двух сходящихся последовательностей упорядочены, их пределы не могут поменяться местами. Однако расстояние между последовательностями может исчезнуть, поэтому строгое неравенство иногда превращается в равенство. Сравнение работает и в обратную сторону: если две границы сходятся к одному числу, зажатая между ними последовательность тоже к нему сходится.

Как ответить на модуле

Пусть $x_n \to a$ и $y_n \to b$ — конечные пределы. Если $x_n \le y_n$ начиная с некоторого номера, то $a \le b$. В частности, если $x_n \le c$ на хвосте, то $a \le c$; если $x_n \ge c$, то $a \ge c$. Даже из строгого неравенства членов получается в общем случае только нестрогое неравенство пределов.

Если $a < b$, то начиная с некоторого номера $x_n < y_n$. Если $x_n \le z_n \le y_n$ на хвосте и $x_n \to L$, $y_n \to L$, то $z_n \to L$: это теорема о зажатой последовательности.

Почему это верно

Перенос границы. Пусть $x_n \le c$ на хвосте, но $a > c$. Выберем $\varepsilon = (a - c)/2 > 0$. Из сходимости после некоторого номера $x_n > a - \varepsilon = (a + c)/2 > c$. На общем хвосте это противоречит $x_n \le c$. Значит, $a \le c$. Нижняя граница доказывается так же либо применением результата к $-x_n$.

Сравнение двух последовательностей. На хвосте $x_n - y_n \le 0$. По правилу разности $x_n - y_n \to a - b$. Только что доказанное даёт $a - b \le 0$, то есть $a \le b$.

Строгий порядок при разных пределах. Пусть $a < b$. Выберем $\varepsilon = (b - a)/3$. После общего порога $x_n < a + \varepsilon$, а $y_n > b - \varepsilon$. Так как $a + \varepsilon < b - \varepsilon$, на этом хвосте $x_n < y_n$. Треть расстояния оставляет положительный промежуток между оценками.

Зажатие. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют пороги N_1, N_2 с $L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$ при $n > N_1$ и $L - \varepsilon < y_n < L + \varepsilon$ при $n > N_2$. Пусть зажатие действует после N_0. Возьмём $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$. Тогда при каждом $n > N$

$$L - \varepsilon < x_n \le z_n \le y_n < L + \varepsilon.$$

Следовательно, $|z_n - L| < \varepsilon$. Это определение $z_n \to L$; существование предела средней последовательности заранее не предполагается.

Пример с разбором

Поскольку $-1 \le (-1)^n \le 1$ и $n > 0$,

$$-\frac{1}{n} \le \frac{(-1)^n}{n} \le \frac{1}{n}.$$

Оба края стремятся к нулю, поэтому по теореме зажатия $(-1)^n/n \to 0$. Несмотря на чередование знаков, расстояние до нуля исчезает.

Где легко ошибиться

- Из $x_n < y_n$ не следует $a < b$: для $x_n = -1/n$ и $y_n = 1/n$ оба предела равны нулю.
- Одного ограничения $0 \le z_n \le 1$ недостаточно для сходимости: $z_n = (1 + (-1)^n)/2$ чередует ноль и единицу.
- В теореме зажатия пределы внешних последовательностей должны совпадать.

Проверь себя

1. Если $x_n > 0$ для всех n и $x_n \to a$, обязательно ли $a > 0$?
2. Докажите сходимость z_n, если $3 - 1/n \le z_n \le 3 + 1/n$.

> **▼ Ответы для проверки**
>
> 1. Нет. Гарантировано только $a \ge 0$; пример $x_n = 1/n$ имеет предел 0.
> 2. Оба края стремятся к 3, поэтому по теореме зажатия $z_n \to 3$.

Опора для устного ответа

Перенос нестрогой границы → сравнение пределов → строгий порядок разных пределов → зажатие.

8. Монотонные последовательности. Теорема о сходимости монотонной ограниченной последовательности. Примеры.

Сначала поймём

Монотонная последовательность сохраняет одно направление: её члены всё время движутся вверх или всё время вниз, хотя на некоторых шагах могут оставаться равными. Если движение вверх ограничено потолком, то значения не могут бесконечно удаляться: они приближаются к самой низкой подходящей верхней границе. Это точная верхняя грань, или супремум.

Как ответить на модуле

Последовательность (x_n) строго возрастает, если $x_{n+1} > x_n$ для всех n, и не убывает, если $x_{n+1} \geq x_n$. Она строго убывает при $x_{n+1} < x_n$ и не возрастает при $x_{n+1} \leq x_n$. Все четыре вида называют монотонными. Неубывание и невозрастание допускают равенство соседних членов. Если нужные монотонность и ограниченность выполнены только на хвосте, теорема применяется к этому хвосту; конечное начало не меняет предел.

Теорема. Неубывающая последовательность, ограниченная сверху, сходится к супремуму множества её значений. Невозрастающая последовательность, ограниченная снизу, сходится к инфимуму множества её значений. Здесь инфимум — наибольшая нижняя грань. Например, $1 - 1/n$ возрастает к 1, а $1/n$ убывает к 0.

Почему это верно

Пусть (x_n) не убывает и ограничена сверху. По теореме Дедекинда существует $a = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Для любого $\varepsilon > 0$ число $a - \varepsilon$ уже не является верхней гранью, поэтому найдётся N с $x_N > a - \varepsilon$. При любом $n > N$ монотонность и определение верхней грани дают

$$a - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq a < a + \varepsilon.$$

Значит, $|x_n - a| < \varepsilon$ при всех $n > N$, и $x_n \to a$. Для невозрастающей последовательности применим доказанное к $-x_n$: она не убывает и ограничена сверху. Её предел равен $-\inf\{x_n\}$, откуда предел исходной последовательности равен инфимуму.

Пример с разбором

Для $x_n = 1 - 1/n$ имеем $x_{n+1} - x_n = 1/(n(n+1)) > 0$ и $x_n < 1$. Поскольку $1/n \to 0$, получаем $x_n \to 1$. Предел не обязан быть членом последовательности.

Где легко ошибиться

- Для неубывающей последовательности нужна граница **сверху**: $x_n = n$ ограничена снизу, но не сходится к конечному числу.
- Ограниченность без монотонности недостаточна: $(-1)^n$ ограничена, но не сходится.

Проверь себя

1. Сходится ли $x_n = 2 + 1/n$ и к чему?
2. Должна ли неубывающая последовательность иметь строго разные соседние члены?

> ▼ **Ответы для проверки**
>
> 1. Да: она убывает, ограничена снизу числом 2 и стремится к 2.
> 2. Нет. Например, постоянная последовательность не убывает.

Опора для устного ответа

Направление и граница → супремум или инфимум → близкий член → монотонность удерживает хвост.

9. Число e.

Сначала поймём

В выражении $(1+1/n)^n$ каждый множитель приближается к единице, но число множителей растёт. Поэтому замена каждого множителя на единицу не определяет предел. Число e — конечное значение, к которому стремится эта последовательность.

Как ответить на модуле

По определению

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Предел существует: последовательность строго возрастает и ограничена сверху числом 3. Если $k! = 1\cdot 2\cdots k$ и $0! = 1$, то тот же предел равен пределу частичных сумм

$$e = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}.$$

Эта запись также обозначается $e = \sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$. Справочное десятичное значение: $e = 2{,}718281828459\ldots$; доказанное приближение с оценкой ошибки получим в вопросе 10. Равенство надо доказать: совпадение отдельных слагаемых ещё не позволяет автоматически перейти к пределу всей суммы.

Почему это верно

Положим $a_n = (1+1/n)^n$. По биному Ньютона

$$a_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right),$$

где пустое произведение при $k=0$ равно 1. Например, при $n=3$ получаем $a_3 = 1 + 1 + \frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}) + \frac{1}{6}(1-\frac{1}{3})(1-\frac{2}{3})$. При сравнении a_n и a_{n+1} сначала сравниваем слагаемые с общими номерами $k = 0,\ldots,n$, а затем учитываем новое положительное слагаемое с $k = n+1$. Для $0 \le k \le n$ все множители положительны; при переходе от n к $n+1$ каждый из них не уменьшается. Значит, $a_{n+1} > a_n$.

Все множители не больше единицы. Поскольку $k! \ge 2^{k-1}$ при $k \ge 2$, имеем

$$a_n \le 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} \le 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} < 3.$$

По теореме о монотонной последовательности существует $e = \lim a_n$.

Докажем связь с факториальной суммой независимо от критерия Коши. Суммы $S_m = \sum_{k=0}^{m} 1/k!$ возрастают и ограничены сверху числом 3, поэтому имеют предел S. Из $a_n \le S_n \le S$ получаем $e \le S$. С другой стороны, при фиксированном m и $n \ge m$ отбросим

положительные слагаемые с номерами больше m:

$$a_n \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right).$$

При $n \to \infty$ в конечной сумме каждый множитель стремится к 1, поэтому $e \geq S_m$ для любого m. Переход к пределу по m даёт $e \geq S$. Следовательно, $e = S$.

Пример с разбором

Первые члены: $a_1 = 2$, $a_2 = 9/4 = 2{,}25$, $a_3 = 64/27 \approx 2{,}37037$. Они растут и каждый меньше e, поскольку e — супремум значений возрастающей последовательности.

Где легко ошибиться

- Из $1 + 1/n \to 1$ нельзя заключить, что степень с растущим показателем стремится к 1.
- Нельзя переставлять предел и число слагаемых без обоснования: выше для этого использованы фиксированная частичная сумма и две оценки.

Проверь себя

1. Почему ограниченность a_n и её монотонность достаточны для существования e?
2. Почему $a_n < 3$ не означает $e < 3$ без дополнительного аргумента?

> ▼ **Ответы для проверки**
>
> 1. По теореме о монотонной ограниченной последовательности существует конечный предел.
> 2. Строгое неравенство при переходе к пределу может стать нестрогим: из этих данных непосредственно следует лишь $e \leq 3$.

Опора для устного ответа

Определение → бином → рост и граница → существование → две оценки для факториальных сумм.

10. Приближенное вычисление числа e.

Сначала поймём

Чтобы вычислить число с гарантированной точностью, недостаточно получить много цифр: нужно оценить оставшуюся ошибку. Для e удобно сложить первые обратные факториалы. Пропущенные положительные слагаемые образуют остаток; его можно ограничить сверху геометрической прогрессией.

Как ответить на модуле

Для натурального $m \geq 1$ положим $S_m = \sum_{k=0}^{m} 1/k!$. Тогда

$$0 < e - S_m < \frac{1}{m\, m!}.$$

Следовательно, S_m приближает e снизу с абсолютной ошибкой меньше $1/(m\, m!)$. Чтобы обеспечить ошибку меньше заданного $\varepsilon > 0$, достаточно выбрать m так, чтобы $1/(m\, m!) \leq \varepsilon$. В лекциях также рассматривается иррациональность e; ниже приведено её доказательство как расширение этой темы.

Почему это верно

Из вопроса 9 число e — предел S_n. Для $r \geq 1$

$$\frac{1}{(m+r)!} = \frac{1}{m!(m+1)(m+2)\cdots(m+r)} \leq \frac{1}{m!(m+1)^r}.$$

Для любого $n > m$ сумма пропущенных членов не больше бесконечной геометрической суммы с первым членом $1/[m!(m+1)]$ и знаменателем $1/(m+1)$. Поэтому при переходе к пределу

$$e - S_m \leq \frac{1}{m!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^r} = \frac{1}{m\, m!}.$$

Чтобы обосновать строгий знак после перехода к пределу, выделим фиксированный положительный зазор во втором пропущенном слагаемом:

$$d = \frac{1}{m!(m+1)^2} - \frac{1}{(m+2)!} > 0.$$

При каждом $n \geq m+2$ сумма $S_n - S_m$ не превосходит полной геометрической мажоранты за вычетом d: для второго слагаемого имеется этот зазор, а все остальные не превосходят соответствующих членов мажоранты. При $n \to \infty$ получаем
$e - S_m \leq 1/(m\, m!) - d < 1/(m\, m!)$. Остаток положителен:
$e - S_m \geq S_{m+1} - S_m = 1/(m+1)! > 0$.

Расширение: иррациональность e. Предположим, что $e = p/q$, где p — целое, q — натуральное. Применим оценку при $m = q$ и умножим на $q!$:

$$0 < q!\left(e - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}\right) < \frac{1}{q} \le 1.$$

При этом $q!e = p(q-1)!$ — целое, и каждое $q!/k!$ при $0 \le k \le q$ тоже целое. Значит, число в скобках после умножения — целое число строго между 0 и 1. Такого целого числа нет. Противоречие доказывает, что e иррационально.

Пример с разбором

При $m = 6$ получаем

$$S_6 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = \frac{1957}{720} \approx 2{,}7180556.$$

Ошибка меньше $1/(6 \cdot 720) = 1/4320 < 0{,}00024$. Поэтому S_6 гарантированно приближает e с абсолютной ошибкой меньше $0{,}00024$.

Где легко ошибиться

- Следующее слагаемое меньше всего остатка: после него есть другие положительные слагаемые.
- Гарантия абсолютной ошибки сама по себе не означает, что все показанные десятичные знаки правильны после округления.

Проверь себя

1. Каким условием на m обеспечить ошибку меньше $0{,}001$?
2. Почему число $q!(e - S_q)$ целое в доказательстве от противного?

> **▼ Ответы для проверки**
>
> 1. Достаточно $1/(m\,m!) \le 0{,}001$; например, $m = 6$ подходит.
> 2. При предположении $e = p/q$ число $q!e$ целое, как и каждое $q!/k!$ при $k \le q$.

Опора для устного ответа

Частичная сумма → геометрическая оценка остатка → выбор точности → целое число между нулём и единицей.

11. Теорема о вложенных отрезках.

Сначала поймём

Представим отрезки, каждый из которых лежит внутри предыдущего. Общая точка существует даже тогда, когда их длины не уменьшаются до нуля. Если же длины стремятся к нулю, общая точка только одна: двум различным точкам в конце концов не хватило бы места.

Как ответить на модуле

Пусть $I_n = [a_n, b_n]$ — непустые замкнутые отрезки и $I_{n+1} \subseteq I_n$ для каждого n. Тогда существует хотя бы одна точка, принадлежащая всем I_n. Если дополнительно $b_n - a_n \to 0$, эта точка единственна; при этом a_n и b_n сходятся к ней. В лекциях стягивание включено в формулировку вложенных отрезков; полезно отдельно видеть роль каждого условия.

Почему это верно

Из вложенности $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$. Последовательность левых концов не убывает и ограничена сверху, например числом b_1. По теореме о монотонной последовательности она сходится к $c = \sup\{a_n\}$.

Для каждого фиксированного m число b_m является верхней гранью всех a_n: при $n \ge m$ это следует из $I_n \subseteq I_m$, а при $n < m$ имеем $a_n \le a_m \le b_m$. Поэтому $a_m \le c \le b_m$. Поскольку m произвольно, c принадлежит каждому отрезку.

Если $b_n - a_n \to 0$ и другая точка d также принадлежит всем отрезкам, то $0 \le |c - d| \le b_n - a_n$ для каждого n. Переход к пределу даёт $|c - d| = 0$, то есть $c = d$. Кроме того, $0 \le b_n - c \le b_n - a_n \to 0$, так что $b_n \to c$.

Пример с разбором

Пусть $I_n = [1 - 1/n, 1 + 1/n]$. Каждый следующий отрезок лежит в предыдущем, его длина $2/n \to 0$. Общая единственная точка равна 1. Напротив, одинаковые отрезки $[0, 1]$ вложены, но их общих точек бесконечно много.

Где легко ошибиться

- Одной вложенности недостаточно для единственности; нужна длина, стремящаяся к нулю.
- Замкнутость существенна: интервалы $(0, 1/n)$ вложены и стягиваются, но общей точки не имеют.

Проверь себя

1. Какую роль играет условие $b_n - a_n \to 0$?
2. Может ли общий конец оставаться неподвижным на всех шагах?

▼ **Ответы для проверки**

1. Оно гарантирует единственность общей точки; существование следует уже из вложенности непустых замкнутых отрезков.
2. Да: например, у $[0, 1/n]$ левый конец всегда равен нулю.

Опора для устного ответа

Вложенность → супремум левых концов → общая точка → стягивание и единственность.

12. Подпоследовательности. Частные пределы. Примеры.

Сначала поймём

Подпоследовательность получается, когда мы выбираем некоторые члены исходной последовательности, сохраняя порядок их номеров. Например, можно оставить чётные номера. Это помогает увидеть разные варианты поведения, скрытые в одной последовательности.

Как ответить на модуле

Если $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ — строго возрастающая последовательность натуральных номеров, то (x_{n_k}) называют подпоследовательностью (x_n). Число a называют конечным частным пределом последовательности, если существует подпоследовательность, сходящаяся к a. Последовательность x_n сходится к a тогда и только тогда, когда любая её подпоследовательность стремится к a. Поэтому наличие двух разных частных пределов исключает сходимость всей последовательности.

Почему это верно

Пусть $x_n \to a$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся N, после которого $|x_n - a| < \varepsilon$. Так как номера n_k строго возрастают, $n_k \geq k$. Поэтому при $k > N$ также $n_k > N$, и

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

Это и означает $x_{n_k} \to a$. Обратно, если любая подпоследовательность стремится к a, то и сама последовательность стремится к a: достаточно выбрать $n_k = k$. Если бы две подпоследовательности имели разные пределы, обе должны были бы сходиться к пределу исходной последовательности; это противоречит единственности предела.

Пример с разбором

Для $x_n = (-1)^n + 1/n$ чётные члены $x_{2k} = 1 + 1/(2k) \to 1$, а нечётные $x_{2k-1} = -1 + 1/(2k-1) \to -1$. Значит, 1 и -1 — разные частные пределы, и вся последовательность не сходится. Других конечных частных пределов здесь нет: среди номеров любой бесконечной подпоследовательности хотя бы одна чётность встречается бесконечно часто; соответствующая подподпоследовательность имеет предел 1 или -1, который должен совпасть с пределом исходной подпоследовательности.

Где легко ошибиться

- Номера должны строго возрастать: повтор одного и того же члена не создаёт подпоследовательность.
- Одна сходящаяся подпоследовательность ещё не гарантирует сходимость всей последовательности: для $x_{2k} = 0$, $x_{2k-1} = k$ чётная подпоследовательность сходится, а вся последовательность нет.

Проверь себя

1. Каковы частные пределы $(-1)^n$?
2. Может ли сходящаяся последовательность иметь два разных частных предела?

> ▼ **Ответы для проверки**
>
> 1. 1 и -1: чётные и нечётные члены постоянны, а любая сходящаяся подпоследовательность имеет один из этих пределов.
> 2. Нет: каждая подпоследовательность сходится к общему пределу.

Опора для устного ответа

Растущие номера → определение частного предела → наследование предела → пример двух пределов.

13. Теорема Больцано-Вейерштрасса.

Сначала поймём

Ограниченная последовательность может постоянно колебаться и не иметь общего предела. Но все её члены находятся в одном конечном отрезке. Можно последовательно выбирать половины этого отрезка, содержащие бесконечно много членов с разными номерами, и получить сходящуюся подпоследовательность.

Как ответить на модуле

Теорема Больцано–Вейерштрасса. Из всякой ограниченной последовательности действительных чисел можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Эквивалентно: всякая ограниченная действительная последовательность имеет хотя бы один конечный частный предел. Сходимость подпоследовательности не означает сходимость всей последовательности.

Почему это верно

Ограниченность означает, что все члены лежат в некотором отрезке $I_1 = [a, b]$. Если $a = b$, последовательность постоянна, и утверждение очевидно. Иначе разделим I_1 пополам. Хотя бы одна половина содержит члены с бесконечно многими **индексами**: иначе объединение двух конечных множеств индексов было бы конечным. Выберем её как I_2 и повторим процедуру. Общая граница половин не мешает рассуждению.

Получим вложенные непустые замкнутые отрезки I_k, каждый из которых содержит члены с бесконечно многими индексами. Их длины равны $(b - a)/2^{k-1}$ и стремятся к нулю. По теореме о вложенных отрезках существует общая точка c.

Выберем n_1 так, чтобы $x_{n_1} \in I_1$. После выбора n_{k-1} возьмём $n_k > n_{k-1}$ с $x_{n_k} \in I_k$. Это возможно: подходящих индексов бесконечно много, а не превосходящих n_{k-1} — лишь конечное число. Поскольку c и x_{n_k} лежат в I_k,

$$0 \le |x_{n_k} - c| \le \frac{b - a}{2^{k-1}} \to 0.$$

Следовательно, $x_{n_k} \to c$.

Пример с разбором

Последовательность $x_n = (-1)^n$ ограничена отрезком $[-1, 1]$, но не сходится. Из неё выделяются, например, чётная подпоследовательность $x_{2k} = 1 \to 1$ и нечётная $x_{2k-1} = -1 \to -1$.

Где легко ошибиться

- Теорема не утверждает сходимость всей последовательности.
- При выборе членов из вложенных отрезков необходимо отдельно обеспечить рост номеров: иначе можно повторно выбрать один и тот же член.

Проверь себя

1. Применима ли теорема к $x_n = n$?
2. Почему в каждой выбранной половине должны оставаться бесконечно многие индексы?

> **▼ Ответы для проверки**
>
> 1. Нет: эта последовательность не ограничена.
> 2. Тогда после любого уже выбранного номера найдётся новый, больший подходящий номер.

Опора для устного ответа

Общий отрезок → половины с бесконечными индексами → общая точка → растущие номера → оценка длиной.

14. Фундаментальные последовательности и их свойства.

Сначала поймём

Когда предел ещё неизвестен, сравнивать члены с ним невозможно. Вместо этого сравним любые два достаточно поздних члена между собой. Если весь хвост можно сделать сколь угодно тесным, последовательность называют фундаментальной.

Как ответить на модуле

Последовательность (x_n) фундаментальна, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся N, такое что для любых $n, m > N$ выполнено $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Равносильно требовать $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ при всех $n > N$ и $p \in \mathbb{N}$; один и тот же N должен подходить для всех сдвигов p.

Свойства: всякая фундаментальная последовательность ограничена; если она имеет подпоследовательность с пределом a, то вся последовательность сходится к a. Обратное к первому свойству неверно.

Почему это верно

Докажем равносильность двух форм определения. Если любые два номера больше N дают расстояние меньше ε, это верно и для пары n и $n + p$. Обратно, для любых двух различных номеров больше N обозначим меньший через n, а больший через $n + p$, где $p \in \mathbb{N}$; при одинаковых номерах расстояние равно нулю. В обеих формах выбранный порог N общий для всех пар.

Для ограниченности применим определение с $\varepsilon = 1$ и выберем соответствующее N. Зафиксируем x_{N+1}. Для каждого $n > N$

$$|x_n| \le |x_n - x_{N+1}| + |x_{N+1}| < 1 + |x_{N+1}|.$$

Конечное начало тоже ограничено. Максимум из модулей первых N членов и числа $1 + |x_{N+1}|$ ограничивает всю последовательность.

Пусть теперь $x_{n_k} \to a$. Для заданного $\varepsilon > 0$ выберем по фундаментальности N так, чтобы любые два члена с номерами больше N отличались меньше чем на $\varepsilon/2$. Выберем один достаточно большой k, для которого $n_k > N$ и $|x_{n_k} - a| < \varepsilon/2$. При любом $n > N$

$$|x_n - a| \le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

Выбранный k фиксирован для всего хвоста, поэтому получена сходимость $x_n \to a$.

Пример с разбором

Для $x_n = 1/n$ выберем натуральное $N > 1/\varepsilon$. Если $n, m > N$, обе дроби положительны и меньше ε; их разность по модулю меньше ε. Последовательность фундаментальна. В то же время $(-1)^n$ ограничена, но при любых N соседние члены после N отличаются на 2, поэтому она не фундаментальна.

Где легко ошибиться

- Недостаточно проверить $|x_{n+1} - x_n| \to 0$: для $x_n = \sqrt{n}$ соседние разности стремятся к нулю, но $x_{4n} - x_n = \sqrt{n}$.
- Нельзя выбирать новый порог N для каждого сдвига p: он должен работать для всех сдвигов одновременно.

Проверь себя

1. Почему для доказательства ограниченности хватило точности 1?
2. Что даёт фундаментальность, если один частный предел уже найден?

> **▼ Ответы для проверки**
>
> 1. Один хвост расположен в конечной окрестности фиксированного члена; оставшееся начало конечно.
> 2. Вся последовательность сходится к этому частному пределу.

Опора для устного ответа

Любые два поздних номера → ограниченность хвоста → сходящаяся подпоследовательность удерживает весь хвост.

15. Необходимое и достаточное условия Коши для сходимости последовательностей. Примеры.

Сначала поймём

Критерий Коши позволяет установить существование предела, не зная самого предела. Достаточно убедиться, что любые два члена достаточно далёкого хвоста близки. Для действительных чисел это не только необходимо, но и достаточно: в них нет «пропусков», в которых мог бы оказаться искомый предел.

Как ответить на модуле

Критерий Коши. Последовательность действительных чисел сходится к конечному действительному пределу тогда и только тогда, когда она фундаментальна, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall n, m > N : \quad |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Необходимость следует из сравнения обоих членов с общим пределом. Достаточность использует ограниченность фундаментальной последовательности, теорему Больцано–Вейерштрасса и свойство о сходящейся подпоследовательности из вопроса 14.

Почему это верно

Необходимость. Пусть $x_n \to a$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует N, при котором $|x_n - a| < \varepsilon/2$ для всех $n > N$. Тогда при любых $n, m > N$

$$|x_n - x_m| \le |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Половины выбраны потому, что складываются две ошибки. Следовательно, последовательность фундаментальна.

Достаточность. Пусть последовательность фундаментальна. По свойству из вопроса 14 она ограничена. По теореме Больцано–Вейерштрасса существует подпоследовательность $x_{n_k} \to a$ с действительным a. Второе свойство из вопроса 14 доказывает, что фундаментальная последовательность при наличии такой подпоследовательности целиком сходится к a. Это завершает доказательство обеих сторон.

Пример с разбором

Пусть $x_n = \sum_{k=1}^{n} 1/[k(k+1)]$. Для любого натурального p разложение $1/[k(k+1)] = 1/k - 1/(k+1)$ даёт сокращение:

$$x_{n+p} - x_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1}.$$

Выберем $N > 1/\varepsilon$. При всех $n > N$ и всех p разность меньше ε: оценка не зависит от p. По критерию последовательность сходится. Сокращая всю сумму, получаем $x_n = 1 - 1/(n+1) \to 1$.

Для контраста гармонические суммы $H_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$ не фундаментальны: $H_{2n} - H_n$ содержит n слагаемых, каждое не меньше $1/(2n)$, поэтому разность не меньше $1/2$ после любого порога.

Где легко ошибиться

- В критерии сравниваются **любые** два поздних члена, а не только соседние.
- Достаточность использует полноту действительных чисел через доказанные ранее теоремы; в рациональных числах аналогичный вывод может не выполняться.

Проверь себя

1. Почему в примере одна оценка должна подходить для всех p?
2. Что показывает оценка $H_{2n} - H_n \geq 1/2$?

> ▼ **Ответы для проверки**
>
> 1. Так требует порядок условий фундаментальности: после выбора N разрешены любые поздние пары.
> 2. После любого порога найдётся пара членов на расстоянии не меньше $1/2$; гармонические суммы не фундаментальны и не сходятся к конечному пределу.

Опора для устного ответа

Сходимость → две половины ошибки; фундаментальность → ограниченность → подпоследовательность → общий предел.

16. Понятие предельной точки. Предел функции по Коши и по Гейне. Примеры.

Сначала поймём

Предельная точка множества — место, к которому можно подходить точками этого множества, каждый раз оставаясь на ненулевом расстоянии. Само место может принадлежать множеству или не принадлежать ему. Например, к нулю можно подходить положительными числами, хотя нуль не входит в интервал $(0, 1)$.

Предел функции отвечает на другой вопрос: к какому числу приближаются её значения, когда аргумент приближается к выбранной точке? Значение функции в самой точке здесь не играет роли. Коши описывает все близкие аргументы сразу; Гейне рассматривает все последовательные способы приближения.

Как ответить на модуле

Пусть $X \subset \mathbb{R}$. Число a — **предельная точка** X, если для каждого $\delta > 0$ найдётся $x \in X$ с $0 < |x - a| < \delta$. Множество таких x называют проколотой δ-окрестностью точки a внутри X.

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, a — предельная точка X, $b \in \mathbb{R}$. По Коши, $\lim_{x \to a} f(x) = b$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in X$ из $0 < |x - a| < \delta$ следует $|f(x) - b| < \varepsilon$.

По Гейне, тот же предел равен b, если для любой последовательности $x_n \in X \setminus \{a\}$, где $x_n \to a$, выполнено $f(x_n) \to b$. Эти определения эквивалентны; доказательство дано в вопросе 17.

Если аргумент уходит в бесконечность. При $x \to +\infty$ вместо близости к конечной точке требуют $x > R$: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $R > 0$, при котором $|f(x) - b| < \varepsilon$ для всех $x \in X$ с $x > R$. Здесь X должно быть неограничено сверху. При $x \to -\infty$ заменяем условие на $x < -R$ и требуем неограниченность снизу. Формулировка Гейне использует любые последовательности из X, уходящие в соответствующую бесконечность. Например, $1/x \to 0$ при $x \to +\infty$: подходит $R = 1/\varepsilon$.

Почему это верно

Предельную точку можно также узнать по последовательности. Если a предельная, для каждого натурального n выберем $x_n \in X$ так, чтобы $0 < |x_n - a| < 1/n$. Тогда $x_n \neq a$ и $x_n \to a$. Обратно, если такая последовательность существует, то для любого $\delta > 0$ достаточно взять достаточно большой номер: соответствующий член лежит в проколотой δ-окрестности. Так условие предельной точки гарантирует, что допустимые приближения действительно существуют.

Пример с разбором

Для $X = (0, 1) \cup \{2\}$ предельные точки составляют $[0, 1]$. К любой точке отрезка можно приближаться точками интервала; точка 2 изолирована, поскольку рядом с ней других точек X нет.

Пусть $f(x) = x^2$ и $x \to 1$. Если $0 < |x-1| < 1$, то $|x| < 2$ и $|x+1| < 3$. Поэтому $|x^2 - 1| = |x-1||x+1| < 3|x-1|$. Для заданного $\varepsilon > 0$ подходит $\delta = \min\{1, \varepsilon/3\}$, значит, предел равен 1.

Где легко ошибиться

- Требовать $a \in X$: нуль предельный для $(0, 1)$, но в интервал не входит.
- Подставлять $f(a)$ в определение: значение в точке может отличаться от предела или отсутствовать.
- Забывать $x_n \neq a$: постоянная последовательность из a не проверяет приближение через другие точки.

Проверь себя

1. Является ли 0 предельной точкой множества $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$? Принадлежит ли ему?
2. Изменится ли предел функции из примера, если положить $f(1) = 100$?

> **▼ Ответы для проверки**
>
> 1. Да: $1/n \to 0$, но нуль множеству не принадлежит.
> 2. Нет: в определении рассматриваются только $x \neq 1$.

Опора для устного ответа

Проколотая окрестность → предельная точка → кванторы Коши → все пути Гейне → пример.

17. Эквивалентность определений пределов функции по Коши и по Гейне.

Сначала поймём

Коши даёт единую гарантию для всех точек достаточно близко к a. Гейне разрешает выбирать любой путь к a и требует одинакового результата. Если общей гарантии нет, можно специально построить путь, который нарушает условие Гейне.

Как ответить на модуле

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, a — предельная точка X, $b \in \mathbb{R}$. Тогда утверждения эквивалентны: для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, при котором $|f(x) - b| < \varepsilon$ для всех $x \in X$ с $0 < |x - a| < \delta$; для каждой последовательности $x_n \in X \setminus \{a\}$, сходящейся к a, значения $f(x_n)$ сходятся к b.

Первое утверждение влечёт второе, потому что хвост любой последовательности попадает в подходящую окрестность. Обратное доказывается от противного: нарушающие точки выбираются на расстоянии меньше $1/n$ от a и образуют недопустимый для утверждения Гейне путь.

Почему это верно

Пусть выполнено определение Коши. Возьмём произвольную допустимую последовательность $x_n \to a$ и произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем по определению $\delta > 0$. Существует N, такое что при $n > N$ выполнено $|x_n - a| < \delta$. Так как $x_n \neq a$, получаем $0 < |x_n - a| < \delta$ и $|f(x_n) - b| < \varepsilon$. Значит, $f(x_n) \to b$.

Обратно, пусть условие Гейне выполнено, но условие Коши не выполнено. Тогда существует фиксированное $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для каждого $\delta > 0$ найдётся $x \in X$ с $0 < |x - a| < \delta$ и $|f(x) - b| \geq \varepsilon_0$. Для каждого n положим $\delta = 1/n$ и выберем соответствующий x_n. Имеем $x_n \neq a$ и $x_n \to a$, но расстояния $|f(x_n) - b|$ никогда не меньше ε_0. Следовательно, $f(x_n)$ не стремится к b — противоречие.

Пример с разбором

Функция знака $f(x) = \operatorname{sgn} x$ равна -1 при $x < 0$, нулю при $x = 0$ и 1 при $x > 0$. При $x \to 0$ положим $x_n = 1/n$ и $y_n = -1/n$. Оба пути допустимы, но значения равны соответственно 1 и -1. Если бы общий предел существовал, по Гейне обе последовательности значений имели бы один предел. Значит, общего предела нет.

Где легко ошибиться

- Проверить одну последовательность: определение требует все допустимые последовательности.
- В отрицании Коши менять ε_0 при каждом n: одно фиксированное положительное число необходимо для противоречия.

Проверь себя

1. Почему в обратном доказательстве выбирают расстояние меньше $1/n$?

2. Достаточно ли найти один путь, вдоль которого значения сходятся к 3, чтобы доказать предел 3?

> ▼ **Ответы для проверки**
>
> 1. Потому что $1/n \to 0$, а значит, выбранные точки обязательно стремятся к a.
> 2. Нет: другой допустимый путь может давать другой результат.

Опора для устного ответа

Коши даёт хвост → отрицание Коши → фиксированное ε_0 → выбор при $1/n$ → противоречие Гейне.

18. Необходимое и достаточное условие Коши для существования предела функции.

Сначала поймём

Чтобы установить существование предела, не обязательно заранее знать его значение. Достаточно проверить, что любые два значения функции становятся сколь угодно близкими, если обе точки достаточно близки к a.

Как ответить на модуле

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, а a — предельная точка X. Конечный предел функции при $x \to a$ существует тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое что для любых $x, y \in X$, удовлетворяющих $0 < |x - a| < \delta$ и $0 < |y - a| < \delta$, выполняется $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Одна и та же окрестность должна подходить для всех пар точек, в том числе лежащих по разные стороны от a. Критерий относится именно к существованию конечного вещественного предела.

Почему это верно

Необходимость. Пусть $f(x) \to b$. Для заданного $\varepsilon > 0$ выберем по определению предела δ, соответствующее точности $\varepsilon/2$. Для любых двух допустимых точек этой окрестности

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - b| + |f(y) - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Достаточность. Возьмём любую последовательность $x_n \in X \setminus \{a\}$ с $x_n \to a$. Для заданного ε критерий даёт δ; начиная с некоторого N, все x_n находятся в этой окрестности. Поэтому для всех $n, m > N$ имеем $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Последовательность значений фундаментальна и по критерию Коши для последовательностей сходится к конечному числу.

Нужно ещё доказать, что число не зависит от пути. Для любых двух допустимых последовательностей x_n и y_n составим чередующуюся последовательность $z_{2n-1} = x_n$, $z_{2n} = y_n$. Она также допустима и стремится к a, поэтому $f(z_n)$ сходится. Её чётная и нечётная подпоследовательности имеют общий предел. Значит, все пути дают одно число. По Гейне существует предел функции.

Пример с разбором

Для $f(x) = \operatorname{sgn} x$ в любой проколотой окрестности нуля возьмём $x = \delta/2$ и $y = -\delta/2$. Тогда $|f(x) - f(y)| = 2$. При $\varepsilon = 1$ условие невозможно выполнить, поэтому конечного предела нет.

Для положительного примера рассмотрим $f(x) = x^2$ при $x \to 0$. Если обе точки лежат в проколотой δ-окрестности нуля, то

$$|x^2 - y^2| \le |x|^2 + |y|^2 < 2\delta^2.$$

Для заданного $\varepsilon > 0$ подходит $\delta = \sqrt{\varepsilon/2}$. Одна эта окрестность работает для всех пар, и критерий подтверждает существование конечного предела.

Где легко ошибиться

- Проверять только одну пару точек: требуется всякая пара в одной выбранной окрестности.
- После сходимости вдоль каждого пути забывать доказать общность их предела.

Проверь себя

1. Почему для необходимости удобно взять точность $\varepsilon/2$?
2. Удовлетворяет ли $f(x) = 1/x$ критерию при $x \to 0$?

> **▼ Ответы для проверки**
>
> 1. Два отклонения от общего предела вместе дают ошибку меньше ε.
> 2. Нет. Для любого $\delta > 0$ положим $s = \min\{\delta/2, 1\}$ и возьмём $x = s$, $y = -s$. Обе точки лежат в проколотой δ-окрестности, но $|1/x - 1/y| = 2/s \geq 2$. При фиксированном $\varepsilon = 1$ критерий нарушен.

Опора для устного ответа

Все пары → половина ошибки → фундаментальность на каждом пути → чередование путей → Гейне.

19. Арифметические действия над функциями, имеющими пределы.

Сначала поймём

Если обе функции стабилизируются около конечных чисел, их сумма и произведение стабилизируются около суммы и произведения этих чисел. При делении необходима дополнительная проверка: знаменатель вблизи точки должен оставаться вдали от нуля.

Как ответить на модуле

Пусть $f, g : X \to \mathbb{R}$, a — предельная точка X, $f(x) \to A$ и $g(x) \to B$ при $x \to a$. Тогда для любого постоянного $c \in \mathbb{R}$

$$cf(x) \to cA, \quad f(x) \pm g(x) \to A \pm B, \quad f(x)g(x) \to AB.$$

Если $B \neq 0$, то $g(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности a внутри X и $f(x)/g(x) \to A/B$. Если исходные области различны, действия рассматривают на их пересечении, причём a должна быть предельной точкой этого пересечения.

Почему это верно

Для любого допустимого пути $x_n \to a$ по Гейне имеем $f(x_n) \to A$, $g(x_n) \to B$. Арифметические теоремы о последовательностях дают пределы $cf(x_n)$, суммы, разности и произведения, указанные выше. Каждый путь произволен, поэтому обратное направление теоремы Гейне даёт утверждения для функций.

Для частного сначала возьмём в определении предела g точность $|B|/2$. Тогда в некоторой проколотой окрестности

$$|g(x)| \geq |B| - |g(x) - B| > \frac{|B|}{2} > 0.$$

Следовательно, частное на этом хвосте определено. Вдоль любого допустимого пути, лежащего в области частного, предел знаменателя равен ненулевому B, и правило частного для последовательностей даёт $f(x_n)/g(x_n) \to A/B$. По Гейне получаем предел функции. Предельность области частного сохранена: достаточно близко к a она содержит все точки X.

Пример с разбором

При $x \to 2$ получаем $x^2 + 1 \to 5$ и $x + 1 \to 3$. Поскольку $3 \neq 0$,

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 1}{x + 1} = \frac{5}{3}.$$

Напротив, для x^2/x при $x \to 0$ правило частного неприменимо: предел знаменателя равен нулю. Но при $x \neq 0$ дробь равна x, и её предел равен нулю.

Где легко ошибиться

- Применять правило частного при $B = 0$: предел может как существовать, так и отсутствовать.
- Не проверять общую область: две функции могут приближаться к a по непересекающимся множествам.

Проверь себя

1. Почему $g(a) = 0$ не мешает правилу частного, если $g(x) \to 2$?
2. Найди предел $(3x + 1)(x - 2)$ при $x \to 1$.

> **▼ Ответы для проверки**
>
> 1. Точка a исключена, а близкие значения g отделены от нуля.
> 2. $4 \cdot (-1) = -4$ по правилу произведения.

Опора для устного ответа

Общая область → пределы вдоль любого пути → арифметика последовательностей → знаменатель отделён от нуля → частное.

20. Первый замечательный предел.

Сначала поймём

Когда угол становится малым, длина дуги единичной окружности и высота соответствующего треугольника становятся почти одинаковыми. Длина дуги равна величине угла только при измерении в радианах. Поэтому при малом угле отношение синуса к углу стремится к единице.

Как ответить на модуле

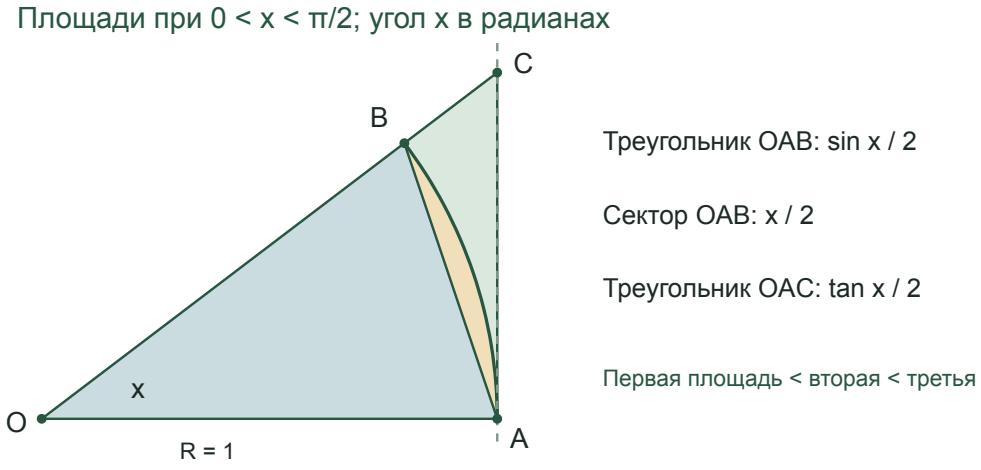
Первый замечательный предел, при измерении x в радианах:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Дробь определена при $x \neq 0$; её значение в нуле для предела не требуется. Доказательство сравнивает площади вписанного треугольника, сектора и треугольника, ограниченного касательной, получая при $0 < x < \pi/2$ неравенство $\sin x < x < \tan x$. Затем отношение зажимают между $\cos x$ и единицей. Для отрицательных углов оно чётно.

Из предела следуют $x/\sin x \to 1$ и $\tan x/x \to 1$ при $x \to 0$; также $\arcsin x/x \to 1$ и $\arctan x/x \to 1$ на их обычных областях определения.

Почему это верно



Пусть $0 < x < \pi/2$. Возьмём окружность радиуса R с центром O, точки A и B на ней и угол AOB, равный x. Касательная в точке A пересекает луч OB в точке C. Треугольник OAB лежит внутри сектора AOB, а сектор лежит внутри треугольника OAC. Поэтому площади упорядочены в том же порядке.

Площадь треугольника OAB равна $R^2 \sin x/2$: его стороны OA и OB равны R. Для сектора она равна $R^2 x/2$, поскольку сектор составляет долю $x/(2\pi)$ полного круга. В прямоугольном треугольнике OAC имеем $AC/R = \tan x$, то есть $AC = R\tan x$; его площадь равна $R^2 \tan x/2$. Итак, три площади соответственно равны

$$\frac{R^2}{2}\sin x, \qquad \frac{R^2}{2}x, \qquad \frac{R^2}{2}\tan x.$$

Формула площади сектора использует радианное измерение. После сравнения площадей и сокращения положительного $R^2/2$ получаем $\sin x < x < \tan x$. Все величины положительны; деление даёт

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Из $\sin t < t$ при положительном t и тождества $1 - \cos x = 2\sin^2(x/2)$ следует $0 \le 1 - \cos x \le x^2/2$ при достаточно малом положительном x. Поэтому $\cos x \to 1$ и по зажатию отношение стремится к 1 справа. Для $x < 0$ положим $t = -x > 0$: $\sin(-t)/(-t) = \sin t/t$, значит, слева предел тот же.

Поскольку $\sin x/x \to 1 \neq 0$, правило частного даёт $x/\sin x \to 1$; из $\cos x \to 1$ следует $\tan x/x = (\sin x/x)/\cos x \to 1$. Слева предел косинуса тот же, поскольку $\cos(-x) = \cos x$.

Для арксинуса положим $y = \arcsin x$. При $x \to 0$ действительно $y \to 0$: синус строго возрастает на главной ветви $[-\pi/2, \pi/2]$, равен нулю в нуле и имеет значения разных знаков в фиксированных точках $\pm\eta$ при $0 < \eta < \pi/2$. Поэтому достаточно малое $|x|$ заставляет $|y| < \eta$. Для ненулевого x также $y \neq 0$, и

$$\frac{\arcsin x}{x} = \frac{y}{\sin y} \to 1.$$

Для арктангенса отдельно положим $y = \arctan x$. Тангенс строго возрастает на главной ветви $(-\pi/2, \pi/2)$ и равен нулю в нуле, поэтому тем же рассуждением $y \to 0$. При $x \neq 0$ имеем $y \neq 0$, откуда

$$\frac{\arctan x}{x} = \frac{y}{\tan y} \to 1.$$

Пример с разбором

При $x \to 0$ также $3x \to 0$. Поэтому

$$\frac{\sin 3x}{5x} = \frac{3}{5}\cdot\frac{\sin 3x}{3x} \longrightarrow \frac{3}{5}.$$

В последней дроби аргумент синуса и знаменатель совпадают, поэтому применим первый замечательный предел.

Где легко ошибиться

- Использовать формулу для градусов: для угла x в градусах предел равен $\pi/180$.

- Писать $\sin x = x$: верно лишь стремление их отношения к единице.

Проверь себя

1. Найди $\lim_{x \to 0} \sin(2x)/x$.
2. Почему доказательства только при $x > 0$ недостаточно без дополнительного шага?

> **▼ Ответы для проверки**
>
> 1. 2: выделяем $2 \sin(2x)/(2x)$.
> 2. Двусторонний предел требует контроля слева; здесь его обеспечивает чётность отношения.

Опора для устного ответа

Радианы → три площади → $\sin x < x < \tan x$ → зажатие → отрицательные углы и следствия.

21. Второй замечательный предел. Следствия.

Сначала поймём

Маленькая прибавка к единице многократно повторяется в степени. Хотя основание стремится к единице, результат не обязан стремиться к единице: накопленный эффект даёт число e.

Как ответить на модуле

Второй замечательный предел имеет вид

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u}=e,$$

где $u>-1$ и $u\neq 0$. Эквивалентная форма: $(1+1/t)^t\to e$ при $t\to+\infty$ и при $t\to-\infty$, на области положительного основания. Число e определено последовательностью $(1+1/n)^n\to e$ из вопроса 9.

Следствия при $x\to 0$: $\ln(1+x)/x\to 1$; $(a^x-1)/x\to\ln a$ при $a>0$; $((1+x)^p-1)/x\to p$ при фиксированном $p\in\mathbb{R}$. Для логарифма по основанию $a>0$, $a\neq 1$, предел $\log_a(1+x)/x$ равен $\log_a e$.

Почему это верно

Переходим от последовательности к произвольному вещественному $t\geq 1$. Пусть $n=\lfloor t\rfloor$, то есть $n\leq t<n+1$. Тогда $1/(n+1)<1/t\leq 1/n$. Поскольку основания больше единицы, степень растёт и по основанию при положительном показателе, и по показателю. Значит,

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\leq\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

При $t\to+\infty$ имеем $n\to\infty$. Нижняя граница равна $a_{n+1}/(1+1/(n+1))$, верхняя — $a_n(1+1/n)$, где $a_n=(1+1/n)^n\to e$. Обе стремятся к e, поэтому средняя тоже. Подстановка $t=1/u$ доказывает предел при $u\to 0+$.

Для левой стороны положим $v=-u/(1+u)>0$. При $u\to 0-$ имеем $v\to 0+$, $1+u=1/(1+v)$ и $1/u=-(1+v)/v$. Поэтому

$$(1+u)^{1/u}=(1+v)^{1/v}(1+v)\longrightarrow e.$$

Обе стороны дают общий предел. Подстановка $u=1/t$ даёт формы при $t\to\pm\infty$; при отрицательных t достаточно брать $t<-1$.

Для следствий используем непрерывность положительной показательной функции и логарифма как известные свойства элементарных функций, а также их обычные законы; это не следует из простой подстановки в исходную неопределённость. Независимое доказательство этих свойств приведено в вопросе 31: для показательной функции используется неравенство Бернулли, затем непрерывность логарифма следует из теоремы об обратной функции. В обоих доказательствах законы и монотонность действительной степени принимаются известными. По второму пределу и непрерывности логарифма

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln\bigl((1+x)^{1/x}\bigr)\longrightarrow\ln e=1.$$

Если $a \neq 1$, положим $y = a^x - 1$. Тогда $y \to 0$, $y \neq 0$ при $x \neq 0$ и $x = \ln(1+y)/\ln a$. Следовательно,

$$\frac{a^x - 1}{x} = \ln a \, \frac{y}{\ln(1+y)} \longrightarrow \ln a.$$

При $a = 1$ дробь равна нулю. Для $p \neq 0$ положим $y = (1+x)^p - 1$; тогда $y \to 0$, $y \neq 0$ и $\ln(1+y) = p\ln(1+x)$. Поэтому

$$\frac{(1+x)^p - 1}{x} = \frac{y}{\ln(1+y)}\, p\, \frac{\ln(1+x)}{x} \longrightarrow p.$$

При $p = 0$ числитель тождественно нулевой. Формула для $\log_a$ следует из $\log_a z = \ln z / \ln a$.

Пример с разбором

При $x \to 0$ имеем $3x \to 0$, поэтому

$$\frac{\ln(1+3x)}{x} = 3\frac{\ln(1+3x)}{3x} \longrightarrow 3.$$

В достаточно малой окрестности $1 + 3x > 0$, так что логарифм определён.

Где легко ошибиться

- Считать предел последовательности доказательством для всех вещественных аргументов без зажатия.
- Доказывать только правую сторону предела у нуля.
- В левой замене потерять множитель $1 + v$: он стремится к единице, но нужен для точного равенства.

Проверь себя

1. Найди $\lim_{x \to 0} (1+2x)^{1/(2x)}$.
2. Почему в доказательстве степенного следствия случай $p = 0$ разобран отдельно?

> ▼ **Ответы для проверки**
>
> 1. e: положим $u = 2x$ и применим второй замечательный предел.
> 2. При $p = 0$ вспомогательное y тождественно нулю, и делить на него нельзя; исходная дробь равна нулю.

Опора для устного ответа

Зажатие целой частью → обе стороны → следствия через логарифм.

22. Бесконечно малые и большие функции и их классификация. Примеры.

Сначала поймём

Две величины могут одновременно стремиться к нулю, но уменьшаться с разной скоростью. Чтобы сравнить их, смотрят на отношение. Например, около нуля квадрат x^2 мал даже по сравнению с самим x.

Бесконечно большая функция, напротив, по модулю превосходит любой заранее выбранный порог. Её знак может меняться: поэтому рост модуля нужно отличать от предела $+\infty$ или $-\infty$.

Как ответить на модуле

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, a — предельная точка X. Функция α бесконечно мала при $x \to a$, если $\alpha(x) \to 0$. Функция F бесконечно большая по модулю, если для любого $M > 0$ найдётся $\delta > 0$, при котором $|F(x)| > M$ для всех $x \in X$ с $0 < |x - a| < \delta$.

Пусть $\alpha, \beta \to 0$ на общей области, a — её предельная точка, а $\beta \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности. Тогда:

- $\alpha = o(\beta)$, или α более высокого порядка малости, если $\alpha/\beta \to 0$;
- α и β имеют одинаковый порядок в принятой здесь формулировке, если $\alpha/\beta \to c$, где $0 < |c| < \infty$;
- $\alpha \sim \beta$, если $\alpha/\beta \to 1$;
- α более низкого порядка малости, если $|\alpha/\beta| \to +\infty$;
- $\alpha = O(\beta)$, если $|\alpha| \leq C|\beta|$ в некоторой проколотой окрестности для некоторого $C > 0$.

Последнее условие слабее одинакового порядка. Аналогично большие функции сравнивают по отношению: $F = o(G)$ означает $F/G \to 0$, а $F \sim G$ — $F/G \to 1$, если знаменатель не равен нулю около точки. Большой G тогда растёт быстрее F по модулю.

Отношение может не иметь ни конечного, ни бесконечного по модулю предела; тогда эти категории через предел отношения не дают ответа. Например, для $\alpha = x(2 + \sin(1/x))$, $\beta = x$ при $x \to 0$ отношение колеблется между 1 и 3; обе оценки $\alpha = O(\beta)$ и $\beta = O(\alpha)$ верны, но предела отношения нет.

Почему это верно

Из $\alpha/\beta \to c \neq 0$ следует $\alpha = O(\beta)$: достаточно близко к a отношение по модулю меньше $|c| + 1$. Обратное неверно: при $x \to 0$ выполняется $|x^2| \leq |x|$ при $|x| < 1$, но $x^2/x = x \to 0$. Эквивалентность даёт одинаковый порядок с $c = 1$. Она равносильна условию $(\alpha - \beta)/\beta \to 0$, поскольку это отношение равно $\alpha/\beta - 1$.

Замена эквивалентных множителей в частном обосновывается разложением: если $\alpha \sim \widetilde{\alpha}$ и $\beta \sim \widetilde{\beta}$, а знаменатели ненулевые, то $\alpha/\beta = (\alpha/\widetilde{\alpha})(\widetilde{\alpha}/\widetilde{\beta})(\widetilde{\beta}/\beta)$. Первый и последний множители стремятся к 1, поэтому при существовании конечного предела средней дроби исходная дробь имеет тот же предел.

Например, при $x \to 0$ первый замечательный предел и следствие второго дают

$$\frac{\sin(3x)}{e^{2x}-1} = \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2x}{e^{2x}-1} \longrightarrow 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

При $x \neq 0$ все знаменатели в этом разложении ненулевые.

Если $\alpha \to 0$ и $\alpha \neq 0$ в проколотой окрестности, то $1/\alpha$ бесконечно велика по модулю: для любого $M > 0$ выберем окрестность, где $0 < |\alpha| < 1/M$. Тогда $|1/\alpha| > M$. Обратно, если F бесконечно велика по модулю, то при достаточно близких x она ненулевая; для любого $\varepsilon > 0$ условие $|F| > 1/\varepsilon$ даёт $|1/F| < \varepsilon$. Так $1/F \to 0$.

Для сравнения обратных величин, когда α и β ненулевые около a, отношение $(1/\alpha)/(1/\beta) = \beta/\alpha$. Поэтому из $\alpha = o(\beta)$ следует $|1/\alpha|/|1/\beta| \to +\infty$: обратная к более малой растёт быстрее. Если $\alpha \sim \beta$, их обратные также эквивалентны по правилу частного.

Пример с разбором

При $x \to 0$ имеем $x^2 = o(x)$, поскольку $x^2/x = x \to 0$. Функции $2x$ и x одинакового порядка, но не эквивалентны: их отношение равно 2. В радианах $\sin x \sim x$ по первому замечательному пределу.

Для больших функций $1/x^2$ и $1/x$ при $x \to 0$ отношение $(1/x)/(1/x^2) = x \to 0$: первая растёт быстрее по модулю. При этом $1/x$ меняет знак, поэтому её двусторонний предел не равен $+\infty$, хотя модуль стремится к $+\infty$.

Где легко ошибиться

- Принимать $O(\beta)$ за одинаковый порядок: ограниченное отношение может стремиться к нулю или не иметь предела.
- Заменять эквивалентные слагаемые в разности без проверки. Например, $x + x^2 \sim x$, но $(x + x^2) - x = x^2$, а замена обоих слагаемых на x ошибочно уничтожит разность.
- Из $\alpha \to 0$ заключать $1/\alpha \to +\infty$ без ненулевости и положительности: без знака гарантируется только рост модуля там, где обратная определена.

Проверь себя

1. Имеют ли $3x$ и x одинаковый порядок и эквивалентны ли они при $x \to 0$?
2. Верно ли $x = O(x^2)$ при $x \to 0$? Почему?

> ▼ **Ответы для проверки**
>
> 1. Да, одинаковый порядок: отношение равно 3. Нет, не эквивалентны, поскольку отношение не стремится к 1.
> 2. Нет: $|x/x^2| = 1/|x|$ не ограничено в проколотой окрестности нуля.

Опора для устного ответа

Переход к нулю или рост модуля → сравнение отношений → o, порядок, эквивалентность и O → обратные величины → осторожность с разностями.

23. Односторонние пределы функции. Примеры.

Сначала поймём

Иногда значения слева и справа от точки приближаются к разным числам. Тогда удобно изучить каждое направление отдельно. Например, функция знака слева от нуля равна -1, а справа равна 1.

Как ответить на модуле

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$. Для правого предела предполагаем, что a — предельная точка множества $X \cap (a, +\infty)$. Запись $\lim_{x \to a+} f(x) = b$ означает: для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при всех $x \in X$ с $0 < x - a < \delta$ выполнено $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Для левого предела предполагаем, что a — предельная точка $X \cap (-\infty, a)$. Запись $\lim_{x \to a-} f(x) = b$ означает: для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, при котором для всех $x \in X$ с $0 < a - x < \delta$ выполнено $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Для предела $+\infty$ справа требуем: для каждого $M > 0$ найдётся $\delta > 0$, при котором все $x \in X$ с $0 < x - a < \delta$ удовлетворяют $f(x) > M$. Для $-\infty$ вместо этого требуется $f(x) < -M$. Слева определения такие же, но условие на аргумент заменяется на $0 < a - x < \delta$; соответствующая сторона области должна быть доступна.

По Гейне правый предел означает сходимость $f(x_n)$ к b для каждой последовательности $x_n \in X$, где $x_n > a$ и $x_n \to a$; слева условие аналогично с $x_n < a$. Когда a предельная с обеих сторон, конечный двусторонний предел существует тогда и только тогда, когда оба односторонних существуют и равны.

Почему это верно

Односторонние формулировки Коши и Гейне эквивалентны по доказательству вопроса 17, применённому к области $X \cap (a, +\infty)$ или $X \cap (-\infty, a)$. Предельность соответствующей стороны гарантирует существование допустимых последовательностей и единственность предела.

Если двусторонний предел равен b, его определение действует для всех близких точек, значит, и отдельно для точек справа и слева. Обратно, пусть оба односторонних предела равны b. Для заданного $\varepsilon > 0$ возьмём подходящие радиусы δ_+ и δ_-; положим $\delta = \min\{\delta_+, \delta_-\}$. Каждая точка $x \in X$ с $0 < |x - a| < \delta$ лежит либо справа, либо слева. Соответствующая односторонняя оценка даёт $|f(x) - b| < \varepsilon$. Значит, двусторонний предел равен b.

Если доступна только одна сторона, последнее утверждение в таком виде неприменимо. Например, на $X = (0, 1)$ у нуля существует правое направление подхода, а левого нет; двустороннее определение на X использует лишь имеющиеся точки и может давать предел.

Пример с разбором

Для $f(x) = \operatorname{sgn} x$ при $x > 0$ значение равно 1, а при $x < 0$ равно -1. Поэтому

$$\lim_{x \to 0+} \operatorname{sgn} x = 1, \qquad \lim_{x \to 0-} \operatorname{sgn} x = -1.$$

Оба предела существуют, но различны, значит, общего предела нет. Значение $\operatorname{sgn} 0 = 0$ на этот вывод не влияет.

Для $1/x$ при $x \to 0+$ предел равен $+\infty$, а при $x \to 0-$ равен $-\infty$. Например, для любого $M > 0$ выбор $\delta = 1/M$ даёт $1/x > M$ справа и $1/x < -M$ слева.

Где легко ошибиться

- Считать существование двух односторонних пределов достаточным без их равенства.
- Говорить об однозначном левом пределе на области, где слева нет приближающихся точек: квантор был бы пустым.
- Учитывать значение в a: обе односторонние окрестности исключают эту точку.

Проверь себя

1. Пусть $f(x) = 2$ при $x < 0$ и $f(x) = 2 + x$ при $x > 0$. Найди односторонние и общий пределы при $x \to 0$.
2. У функции на $X = [0, 1)$ есть левый предел при $x \to 0-$ в приведённом определении?

> ▼ **Ответы для проверки**
>
> 1. С обеих сторон предел равен 2, поэтому общий предел тоже равен 2; значение в нуле несущественно.
> 2. Нет: нуль не является предельной точкой левой части области, которая пуста.

Опора для устного ответа

Предельность нужной стороны → определения Коши и Гейне → обе стороны → равенство пределов → пример знака.

24. Непрерывность функции. Примеры.

Сначала поймём

Предел описывает значения функции рядом с точкой. Непрерывность требует ещё, чтобы они приближались именно к значению функции в самой точке. Если график около точки стремится к высоте 2, а в точке поставлено значение 5, непрерывности нет, хотя предел существует. При этом приближаться разрешено только через точки области определения.

Как ответить на модуле

Пусть $f : D \to \mathbb{R}$ и $a \in D$. Функция непрерывна в a, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in D$ из $|x - a| < \delta$ следует $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Здесь ε — допустимая ошибка значения, а δ — допустимое расстояние аргумента от точки.

По Гейне это равносильно тому, что для любой последовательности $x_n \in D$, сходящейся к a, выполняется $f(x_n) \to f(a)$. Если a — предельная точка области, это также равносильно равенству $\lim_{x \to a,\, x \in D} f(x) = f(a)$. На множестве функция непрерывна, если непрерывна в каждой его точке относительно области. Например, постоянная функция, функция $f(x) = x$ и многочлены непрерывны на $\mathbb{R}$.

Почему это верно

Пусть выполнено условие с ε и δ. Для любой последовательности $x_n \to a$ существует номер N, после которого $|x_n - a| < \delta$. Тогда после этого номера $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$. Значит, значения сходятся к $f(a)$.

Обратно, если условие непрерывности нарушено, существует $\varepsilon_0 > 0$, для которого при каждом $\delta > 0$ найдётся $x \in D$ с $|x - a| < \delta$, но $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon_0$. Выбирая последовательно $\delta = 1/n$, получаем $x_n \to a$, хотя значения не сходятся к $f(a)$. Это противоречит условию Гейне.

В определении предела исключают $x = a$; в определении непрерывности разрешают. Добавление этой точки ничего не меняет: разность значений в ней равна нулю. Поэтому для предельной точки равносильность с пределом следует прямо из определений. Если же a изолирована, достаточно выбрать окрестность, содержащую из D только a: непрерывность автоматическая, а проколотый предел не используется.

Пример с разбором

Для $f(x) = x^2$ в произвольной точке a сначала ограничим второй множитель. Если $|x - a| < 1$, то $|x + a| \leq |x - a| + 2|a| < 1 + 2|a|$. Поэтому

$$|x^2 - a^2| = |x - a||x + a| < (1 + 2|a|)|x - a|.$$

Для заданного $\varepsilon > 0$ выбираем $\delta = \min\{1, \varepsilon/(1 + 2|a|)\}$. Тогда при $|x - a| < \delta$ ошибка меньше ε. Следовательно, $\lim_{x \to 2} x^2 = 4 = f(2)$.

Где легко ошибиться

1. Существование предела не гарантирует непрерывность: он ещё должен равняться значению в точке.
2. В изолированной точке нельзя требовать существования проколотого предела: относительная непрерывность там выполнена автоматически.

Проверь себя

1. Пусть $f(x) = 2$ при $x \neq 0$, а $f(0) = 5$. Непрерывна ли функция в нуле?
2. Непрерывна ли в 1 функция на области $\{1, 3\}$, если её значения произвольны?

> **▼ Ответы для проверки**
>
> 1. Нет: предел равен 2, а значение равно 5.
> 2. Да: точка 1 изолирована; при $\delta < 2$ другой допустимой точки рядом нет.

Опора для устного ответа

Значение и предел → определение через ε, δ → Гейне → относительная область → пример.

25. Односторонняя непрерывность функции. Примеры.

Сначала поймём

Иногда функцию удобно проверять только с одной стороны. Например, в начале отрезка нет допустимых аргументов левее него. Правая непрерывность означает: когда допустимые аргументы подходят справа, значения подходят к значению в самой точке. Левая непрерывность устроена зеркально.

Как ответить на модуле

Пусть $a \in D$. Функция непрерывна справа в a, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, при котором для всех $x \in D$ из $0 \le x - a < \delta$ следует $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Для непрерывности слева условие на аргумент заменяется на $0 \le a - x < \delta$.

По Гейне справа проверяют все последовательности $x_n \in D$ с $x_n \ge a$ и $x_n \to a$; значения должны сходиться к $f(a)$. Слева берут $x_n \le a$. Если с нужной стороны есть точки области сколь угодно близко к a, соответствующее условие равносильно равенству одностороннего предела и $f(a)$. Общая непрерывность равносильна одновременной непрерывности слева и справа. На отрезке в левом конце нужна правая, в правом — левая непрерывность.

Почему это верно

Эквивалентность с последовательностями доказывается как в вопросе 24, но выбранные точки ограничены нужной стороной. Если условие нарушено справа, для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ при каждом n найдётся $x_n \in D$ с $0 \le x_n - a < 1/n$ и ошибкой не меньше ε_0. Это противоречит правому критерию Гейне. Обратное направление следует из попадания хвоста любой последовательности в выбранную δ-окрестность.

Из общей непрерывности односторонние следуют сразу. Обратно, для заданного ε выберем подходящие δ_- и δ_+ и положим $\delta = \min\{\delta_-, \delta_+\}$. Каждая точка области в этой окрестности лежит либо слева, либо справа, поэтому одна из оценок применима. Если точек с данной стороны сколь угодно близко нет, соответствующее условие непрерывности выполняется автоматически; односторонний проколотый предел тогда не используется.

Пример с разбором

Пусть $f(x) = -1$ при $x < 0$ и $f(x) = 1$ при $x \ge 0$. При приближении к нулю слева все значения равны -1, а справа — 1. Поэтому

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = -1, \qquad \lim_{x \to 0+} f(x) = 1 = f(0).$$

Функция непрерывна справа, но не слева и не непрерывна в нуле в целом. Изменение значения в нуле не меняет односторонние пределы.

Где легко ошибиться

1. Равенство одного одностороннего предела значению не доказывает общую непрерывность при наличии второй стороны.
2. На конце области нельзя подставлять в проверку точки, где функция не определена.

Проверь себя

1. Для функции $f(x) = \lfloor x \rfloor$ найди левый и правый пределы в 2 и сторону непрерывности.
2. Пусть область содержит проколотую окрестность нуля, $f(0) = 3$, а оба односторонних предела равны 2. Есть ли односторонняя непрерывность?

> **▼ Ответы для проверки**
>
> 1. Слева предел 1, справа $2 = f(2)$; функция непрерывна справа.
> 2. Нет ни с одной стороны: каждый предел отличается от значения 3.

Опора для устного ответа

Две стороны → односторонние определения → критерий Гейне → объединение через минимум → пример.

26. Точки разрыва функции и их классификация. Примеры.

Сначала поймём

Проверим отдельно три вещи: к чему стремятся значения слева, к чему справа и чему равно значение в точке. Разрыв может возникнуть из-за неправильного значения в одной точке, из-за скачка или из-за более сложного поведения рядом с точкой.

Как ответить на модуле

Пусть a — внутренняя точка интервала, на котором задана действительная функция. Точка разрыва — точка, в которой функция не непрерывна. Обозначим односторонние пределы $L = \lim_{x \to a-} f(x)$ и $R = \lim_{x \to a+} f(x)$, когда они существуют.

Если $L = R = b$ — конечное число, но $f(a) \neq b$, разрыв устранимый. Если L и R конечны и различны, имеем скачок величины $|R - L|$; в терминологии конспекта это разрыв первого рода. Если хотя бы один односторонний предел бесконечен или не существует, разрыв второго рода. Когда $L = R = f(a)$, разрыва нет. В других учебниках устранимый разрыв также относят к первому роду: важно назвать сами пределы.

Для точки вне области определения непрерывность исходной функции не проверяют; конечный предел может позволить её непрерывно доопределить. В лекциях такую выколотую точку с конечным общим пределом тоже называют устранимым разрывом: речь идёт о возможности доопределения. На конце промежутка проверяют доступную сторону, а не обычную двустороннюю классификацию.

Почему это верно

Двусторонний конечный предел существует и равен b ровно тогда, когда оба односторонних предела равны b. Для прямого направления ограничиваем общий подход каждой стороной. Для обратного при заданном ε объединяем две подходящие окрестности, взяв минимум их радиусов. Затем сравниваем полученный предел со значением: согласно определению непрерывности нужно равенство с $f(a)$.

Если общий предел равен b, изменение значения только в a не влияет на предел, поскольку в нём сама точка исключена. Присвоение значения b устраняет разрыв. При $L \neq R$ никакое одно значение не может совпасть с обоими пределами, а бесконечный или отсутствующий односторонний предел тоже нельзя исправить изменением только одной точки.

Пример с разбором

Положим $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ при $x \neq 1$ и $f(1) = 7$. При $x \neq 1$ сокращение даёт $f(x) = x + 1$, поэтому

$$L = R = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2, \qquad f(1) = 7.$$

Разрыв устранимый: заменяем значение 7 на 2. Для сравнения, у $\operatorname{sgn} x$ в нуле пределы равны -1 и 1, поэтому скачок равен 2. У функции $1/x$, дополненной нулём в точке 0, пределы равны $-\infty$ и $+\infty$: это второй род.

Где легко ошибиться

1. Значение в точке само по себе не определяет тип: надо вычислить оба односторонних предела.
2. Разрыв второго рода не обязательно связан с бесконечностью: предел может не существовать из-за колебаний.

Проверь себя

1. Если $L = R = 4$ и $f(a) = 9$, как исправить функцию?
2. Если $L = 1$ и $R = 3$, поможет ли изменение $f(a)$?

> **▼ Ответы для проверки**
>
> 1. Положить $f(a) = 4$: это устранимый разрыв.
> 2. Нет: изменение одного значения не меняет разные односторонние пределы.

Опора для устного ответа

Левый и правый пределы → значение → устранимый случай → скачок → второй род.

27. Арифметические действия над непрерывными функциями.

Сначала поймём

Если две функции мало меняются при малом изменении аргумента, их сумму и произведение тоже можно удержать близкими к прежним значениям. При делении нужна дополнительная защита: знаменатель в точке должен быть отличен от нуля, тогда непрерывность не даст ему обратиться в ноль и достаточно близко к ней.

Как ответить на модуле

Пусть $f, g : X \to \mathbb{R}$ непрерывны в $a \in X$ и $c \in \mathbb{R}$ — постоянная. Тогда функции cf, $f + g$, $f - g$ и fg непрерывны в a. Если $g(a) \neq 0$, частное f/g также непрерывно в a; более того, знаменатель ненулевой в некоторой окрестности точки относительно X. На множестве эти утверждения применяются в каждой точке, а частное рассматривается там, где знаменатель не равен нулю. На концах промежутка непрерывность понимается относительно области определения.

Почему это верно

По критерию Гейне возьмём любую последовательность $x_n \in X$, $x_n \to a$. Тогда $f(x_n) \to f(a)$ и $g(x_n) \to g(a)$. Правила пределов последовательностей дают

$$cf(x_n) \to cf(a), \quad f(x_n) \pm g(x_n) \to f(a) \pm g(a), \quad f(x_n)g(x_n) \to f(a)g(a).$$

Каждый предел совпадает со значением соответствующей функции в a. По Гейне все перечисленные функции непрерывны. Этот аргумент работает и в изолированной точке, поскольку последовательности могут содержать саму точку.

Пусть $b = g(a) \neq 0$. По непрерывности для точности $|b|/2$ найдётся окрестность, где $|g(x) - b| < |b|/2$. По неравенству треугольника $|g(x)| \geq |b| - |g(x) - b| > |b|/2$. В ней знаменатель ненулевой. Любая последовательность $x_n \to a$ из области частного начиная с некоторого номера попадает в эту окрестность. Правило частного даёт $f(x_n)/g(x_n) \to f(a)/b$; конечное начало на предел не влияет. По Гейне частное непрерывно.

Пример с разбором

Пусть $h(x) = (x^2 + 1)/(x - 2)$. Числитель и знаменатель непрерывны, поэтому h непрерывна при $x \neq 2$. В точке 3 знаменатель равен 1, и

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 1}{x - 2} = \frac{3^2 + 1}{3 - 2} = 10 = h(3).$$

В точке 2 исходная дробь не определена; правило частного там неприменимо. Более того, числитель стремится к 5, а знаменатель к нулю с разными знаками с разных сторон.

Где легко ошибиться

1. Непрерывность знаменателя не заменяет условие $g(a) \neq 0$.

2. Сокращение формулы не добавляет автоматически отсутствующую точку в область исходной функции.

Проверь себя

1. Найди $\lim_{x \to 1}(2x^2 + 3)/(x + 1)$.
2. Почему при $g(a) \neq 0$ одной информации о значении без непрерывности g недостаточно для ненулевости рядом?

> **▼ Ответы для проверки**
>
> 1. Предел равен $(2 + 3)/2 = 5/2$: знаменатель стремится к ненулевому числу 2.
> 2. Например, $g(a) = 1$, а $g(x) = 0$ при $x \neq a$; рядом знаменатель равен нулю.

Опора для устного ответа

Общая область → сумма и произведение → ограничение знаменателя снизу → частное → проверка области.

28. Сложная функция. Непрерывность сложной функции.

Сначала поймём

Сложная функция выполняет действия по очереди: сначала внутренняя функция превращает аргумент в промежуточное значение, затем внешняя обрабатывает его. Непрерывность передаётся по этой цепочке: близкие исходные аргументы дают близкие промежуточные значения, а те — близкие результаты.

Как ответить на модуле

Пусть $g : X \to Y$ и $f : Y \to \mathbb{R}$. Их композиция определяется формулой $(f \circ g)(x) = f(g(x))$: сначала применяется g, затем f. Если функции заданы независимо, область композиции состоит из всех x области g, для которых $g(x)$ принадлежит области f.

Теорема: если g непрерывна в $a \in X$, а f непрерывна в $b = g(a)$ относительно своей области и композиция определена на рассматриваемом множестве, то $f \circ g$ непрерывна в a. Внешнюю функцию проверяют именно в $g(a)$. Равенство $g(x) = g(a)$ при некоторых $x \neq a$ допустимо. Порядок функций существенен: композиции в разных порядках могут различаться и по формулам, и по областям.

Почему это верно

Зададим произвольную точность $\varepsilon > 0$ для конечного результата. По непрерывности внешней функции в b найдётся $\eta > 0$: если допустимое y удовлетворяет $|y - b| < \eta$, то $|f(y) - f(b)| < \varepsilon$. Здесь η — требуемая точность промежуточного значения.

Теперь по непрерывности g в a найдётся $\delta > 0$ такое, что при допустимом x и $|x - a| < \delta$ выполнено $|g(x) - g(a)| < \eta$. Поскольку $g(x)$ входит в область f, можно подставить $y = g(x)$ в первую оценку. Получаем

$$|f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon.$$

Это и есть непрерывность композиции. Даже если $g(x) = g(a)$, оценка справедлива: определение непрерывности внешней функции включает саму точку b.

Пример с разбором

Пусть $g(x) = x^2 + 1$, $f(y) = 1/y$. Поскольку $g(x) \geq 1$, композиция определена при всех действительных x. Многочлен непрерывен, а обратная величина непрерывна при ненулевом аргументе. Поэтому композиция непрерывна и

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{2^2 + 1} = \frac{1}{5}.$$

Здесь внутренняя функция стремится к 5, и внешнюю проверяют в 5, а не в 2.

Где легко ошибиться

1. Запись $f \circ g$ читается справа налево: это не произведение функций.

2. Нельзя подставлять значение внутренней функции вне области определения внешней.

Проверь себя

1. При $g(x) = x + 1$ и $f(y) = y^2$ найди обе композиции.
2. Для $g(x) = x^2$ и $f(y) = 1/y$ где определена $f \circ g$?

> ▼ **Ответы для проверки**
>
> 1. $(f \circ g)(x) = (x + 1)^2$, а $(g \circ f)(x) = x^2 + 1$.
> 2. При $x \neq 0$: внешняя функция не принимает нулевой аргумент.

Опора для устного ответа

Порядок и область → условие в $g(a)$ → выбор η → выбор δ → подстановка.

29. Монотонные функции, теорема о существовании предела монотонной функции. Теорема о разрывах монотонной функции.

Сначала поймём

Монотонная функция при движении аргумента в одном направлении не меняет направления движения своих значений. Поэтому рядом с границей она не может всё время колебаться вверх и вниз. Если её значения при этом ограничены в нужную сторону, они подходят к точной грани. Без такой ограниченности возможен бесконечный предел.

Как ответить на модуле

На промежутке I функция не убывает, если из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \le f(x_2)$, и строго возрастает, если следует $f(x_1) < f(x_2)$. Невозрастание и строгое убывание определяются обратными неравенствами. Постоянная функция не убывает и не возрастает, но не является строго монотонной.

Рассматриваем действительную монотонную функцию на промежутке I; точка c может не принадлежать I. Подход слева доступен, если для каждого $\delta > 0$ найдётся $x \in I$ с $c - \delta < x < c$. Подход справа доступен, если для каждого $\delta > 0$ найдётся $x \in I$ с $c < x < c + \delta$. Только при наличии соответствующего подхода применяется формула для этой стороны. Для неубывающей функции такие односторонние пределы существуют, конечные или бесконечные:

$$f(c-) = \sup_{x \in I,\, x < c} f(x), \qquad f(c+) = \inf_{x \in I,\, x > c} f(x).$$

При отсутствии соответствующей конечной грани понимаем предел как $+\infty$ слева или $-\infty$ справа. Для невозрастающей функции слева стоит инфимум, справа супремум; при неограниченности возможны соответственно $-\infty$ и $+\infty$. Во внутренней точке $c \in I$ оба предела конечны. Для неубывающей функции $f(c-) \le f(c) \le f(c+)$. Следовательно, она либо непрерывна, либо имеет скачок; устранимый разрыв невозможен. Если образ монотонной функции на промежутке сам является промежутком, функция непрерывна на своей области, включая доступные стороны включённых концов.

Почему это верно

Рассмотрим неубывающую функцию слева от c. Пусть множество значений слева ограничено сверху и L — его супремум, то есть наименьшая верхняя грань. Для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся $x_1 < c$ из I с $f(x_1) > L - \varepsilon$: иначе $L - \varepsilon$ было бы верхней гранью. При $x_1 < x < c$ монотонность даёт

$$L - \varepsilon < f(x_1) \le f(x) \le L.$$

Выбор $\delta = c - x_1$ доказывает предел L слева. Если множество не ограничено сверху, для любого $E > 0$ выбираем $x_1 < c$ с $f(x_1) > E$. Тогда $f(x) \ge f(x_1) > E$ при $x_1 < x < c$, и предел равен $+\infty$.

Справа, если существует конечный инфимум R, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $x_2 > c$ с $f(x_2) < R + \varepsilon$. При $c < x < x_2$ имеем $R \le f(x) \le f(x_2) < R + \varepsilon$; берём $\delta = x_2 - c$. Если значения справа не ограничены снизу, для любого $E > 0$ выбираем x_2 с $f(x_2) < -E$, и при $c < x < x_2$ получаем $f(x) < -E$. Для невозрастающей функции применяем доказанное к $-f$: супремум и инфимум меняются местами, как и знаки бесконечности.

Пусть теперь c внутри I. Выберем $u < c < v$ из I. Все значения слева ограничены сверху числом $f(c)$, а хотя бы одно из них равно $f(u)$; поэтому их супремум конечен. Значения справа ограничены снизу числом $f(c)$ и включают $f(v)$; инфимум конечен. Из монотонности следует $L \le f(c) \le R$. Если $L = R$, значение между ними равно общему пределу и функция непрерывна. Если $L < R$, это скачок. Для невозрастающей функции аналогично $L \ge f(c) \ge R$.

Докажем следствие об образе. Пусть неубывающая функция имеет во внутренней точке скачок $L < R$. Выберем y строго между L и R, отличное от $f(c)$. При $x < c$ имеем $f(x) \le L < y$, а при $x > c$ имеем $f(x) \ge R > y$. В точке c значение тоже не равно y. Поэтому функция не принимает y, хотя принимает значения по обе стороны от него: например, в любых точках промежутка левее и правее c. Это противоречит тому, что образ — промежуток.

На включённом левом конце a разрыв справа означал бы $f(a) < f(a+)$. Каждое число между ними не достигается: в a значение меньше, а правее все значения не меньше инфимума $f(a+)$. При этом образ содержит значения по обе стороны такого числа, что невозможно для промежутка. На включённом правом конце доказательство симметрично. Для невозрастающей функции применяем рассуждение к $-f$. На одноточечном промежутке непрерывность автоматическая.

Дополнение: сколько может быть скачков

Это дополнительное утверждение, а не отдельное требование вопроса в PDF. Множество точек разрыва монотонной функции на промежутке не более чем счётно: его элементы можно перечислить последовательностью; конечное множество тоже допускается.

Пусть f не убывает. Каждому внутреннему скачку в точке c сопоставим непустой интервал $(f(c-), f(c+))$. Для двух точек $c < d$ возьмём t между ними. Монотонность даёт $f(c+) \le f(t) \le f(d-)$, поэтому эти интервалы не пересекаются. Между любыми двумя действительными числами есть рациональное: достаточно взять натуральное n столь большим, чтобы расстояние между числами после умножения на n превышало 1, и выбрать целое число между результатами.

Рациональные числа счётны: их можно перечислить по дробям с целым числителем и натуральным знаменателем, перебирая пары по возрастанию суммы модулей. В каждом интервале скачка выберем первое рациональное число из такого списка. Непересечение интервалов означает, что разные скачки получают разные рациональные числа. Это инъекция множества скачков в счётное множество $\mathbb{Q}$, значит, скачков не более чем счётно. Для невозрастающей функции применяем доказанное к $-f$; включённых концов не более двух.

Пример с разбором

Функция $f(x) = \lfloor x \rfloor$ не убывает. Для целого k при $k-1 < x < k$ она равна $k-1$, а при $k \le x < k+1$ равна k. Следовательно,

$$f(k-) = k-1, \qquad f(k) = f(k+) = k, \qquad |f(k+) - f(k-)| = 1.$$

В каждом целом числе имеется скачок. А неубывающая функция $g(x) = 1/(1-x)$ на $(0,1)$ имеет $\lim_{x \to 1-} g(x) = +\infty$: на исключённом конце конечность не гарантирована.

Где легко ошибиться

1. Одна монотонность на открытом промежутке не гарантирует конечный предел у его конца: нужна соответствующая ограниченность.
2. Равные конечные односторонние пределы монотонной функции во внутренней точке автоматически равны её значению; устранимого разрыва там нет.

Проверь себя

1. Может ли неубывающая функция иметь $f(c-) = 2$, $f(c) = 5$, $f(c+) = 4$ во внутренней точке?
2. Пусть к c можно подходить слева по области, а неубывающая функция слева от c ограничена сверху числом 10. Обязательно ли её предел слева равен 10?

> **▼ Ответы для проверки**
>
> 1. Нет: необходимо $f(c-) \le f(c) \le f(c+)$, а здесь $5 > 4$.
> 2. Нет. Предел равен супремуму значений, а 10 может быть лишь неточной верхней гранью; например, постоянная функция 1 имеет предел 1.

Опора для устного ответа

Виды монотонности → точная грань → выбор точки и δ → случай неограниченности → конечность и скачок внутри.

30. Обратная функция. Непрерывность обратной функции.

Сначала поймём

Обычная функция по аргументу находит результат. Обратная по результату восстанавливает аргумент. Для этого каждому полученному результату должен соответствовать только один исходный аргумент. Обратная определена лишь на множестве действительно полученных значений: например, квадрат действительного числа не бывает отрицательным.

Как ответить на модуле

Функция $f : X \to \mathbb{R}$ инъективна, если разные аргументы имеют разные значения. Для инъективной функции на её образе $Y = f(X)$ определена обратная $f^{-1} : Y \to X$: если $f(x) = y$, то $f^{-1}(y) = x$. Выполняются $f^{-1}(f(x)) = x$ при $x \in X$ и $f(f^{-1}(y)) = y$ при $y \in Y$. Обозначение f^{-1} не означает $1/f$.

Теорема. Если функция непрерывна и строго монотонна на промежутке I, то её образ $J = f(I)$ — промежуток, обратная функция существует на J, непрерывна и строго монотонна в том же направлении. Включённые концы рассматриваются с доступной стороны. Строгая монотонность сама по себе даёт обратимость, а непрерывность исходной функции входит в условия этой теоремы о непрерывности обратной.

Почему это верно

Строгая монотонность исключает равенство значений при разных аргументах, поэтому каждому $y \in J$ соответствует единственный прообраз. Так определена обратная функция $h = f^{-1}$.

Пусть f строго возрастает и $y_1 < y_2$. Если бы $h(y_1) \geq h(y_2)$, то возрастание дало бы $y_1 = f(h(y_1)) \geq f(h(y_2)) = y_2$. Противоречие. Значит, $h(y_1) < h(y_2)$. Аналогично обратная к строго убывающей функции строго убывает.

По следствию теоремы Больцано — Коши из вопроса 32 образ J является промежутком. Непрерывность обратной проверим непосредственно. Пусть $y_0 = f(x_0)$ и $\varepsilon > 0$; для определённости f возрастает. Если в I есть точки левее x_0, выберем $u \in I$ так, чтобы $x_0 - \varepsilon < u < x_0$. Если есть точки правее, выберем $v \in I$ так, чтобы $x_0 < v < x_0 + \varepsilon$. Такой выбор возможен, поскольку I — промежуток. Существующие разности $y_0 - f(u)$ и $f(v) - y_0$ положительны. Возьмём $\delta > 0$ меньше каждой из них. Если одной стороны нет, учитываем только другую; для одноточечного промежутка утверждение очевидно.

Для $y \in J$ при $|y - y_0| < \delta$ прообраз $h(y)$ не может лежать левее u или правее v: иначе монотонность противоречила бы выбранным границам значений. Там, где стороны нет, прообразов с этой стороны не существует. Поэтому $|h(y) - x_0| < \varepsilon$. Для убывающей функции доказательство такое же с обращёнными неравенствами. Это включает концы области.

Пример с разбором

Пусть $f(x) = 3 - x^2$ на $[0, 2]$. Она непрерывна и строго убывает, а значения на концах равны 3 и -1. Её образ $[-1, 3]$. Из $y = 3 - x^2$ и условия $x \geq 0$ получаем $f^{-1}(y) = \sqrt{3 - y}$, $y \in [-1, 3]$. Обратная непрерывна и убывает. Проверка: $f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2} = x$ на выбранной области.

Где легко ошибиться

1. Считать f^{-1} дробью $1/f$: обращение восстанавливает аргумент, а дробь выполняет другое действие.
2. Назначать обратной всю $\mathbb{R}$: она определена на образе исходной функции.
3. Заменять строгую монотонность неубыванием: постоянный участок даёт несколько прообразов.

Проверь себя

1. Обратима ли x^2 на $[-2, 2]$? Почему?
2. Найди обратную к $f(x) = 3 - x$ на $[1, 4]$ и её область.

> **▼ Ответы для проверки**
>
> 1. Нет: 2 и -2 дают одно значение 4.
> 2. $f^{-1}(y) = 3 - y$ на $[-1, 2]$: исходная функция убывает от 2 до -1.

Опора для устного ответа

Инъективность и образ → тождества → строгая монотонность → промежуток значений → непрерывность обратной.

31. Непрерывность элементарных функций.

Сначала поймём

Непрерывность сложной формулы собирается из непрерывности её составляющих. Но сначала надо проверить, что каждое действие вообще определено: например, знаменатель не равен нулю, а аргумент логарифма положителен. В граничной точке области непрерывность проверяют только со стороны допустимых аргументов.

Как ответить на модуле

Постоянная, x, многочлены, $\sin x$ и $\cos x$ непрерывны на $\mathbb{R}$; рациональные функции — при ненулевом знаменателе. $\tan x$ непрерывен при $x \neq \pi/2 + \pi k$, $\cot x$ — при $x \neq \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

a^x непрерывна на $\mathbb{R}$ при $a > 0$; $\log_a x$ — при $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. Для любого действительного α функция x^α непрерывна при $x > 0$. Натуральные степени непрерывны на всей прямой, отрицательные целые — вне нуля. Корень нечётной степени непрерывен на $\mathbb{R}$, чётной — на $[0, +\infty)$; рациональные степени строятся из таких корней и целых степеней, при отрицательном показателе ноль исключается.

arcsin и arccos непрерывны на $[-1, 1]$, arctan и arccot — на $\mathbb{R}$. Конечные допустимые арифметические действия и композиции сохраняют непрерывность в точках, где выражение определено.

Почему это верно

Для постоянной разность значений равна нулю, а для $f(x) = x$ достаточно $\delta = \varepsilon$. Правила суммы и произведения дают многочлены, правило частного — рациональные функции там, где знаменатель не равен нулю.

Из $|\sin t| \leq |t|$ и формулы разности получаем

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\cos\frac{x + x_0}{2}\right| \leq |x - x_0|.$$

Поэтому синус непрерывен. Косинус непрерывен как $\sin(\pi/2 - x)$, а тангенс и котангенс — как частные там, где их знаменатели не нули.

Сначала получим корни независимо от логарифма. Для нечётного натурального q функция $t \mapsto t^q$ непрерывна и строго возрастает на $\mathbb{R}$; для чётного q она непрерывна и строго возрастает на $[0, +\infty)$. Это следует из сравнения степеней и правила произведения. Соответствующие образы равны $\mathbb{R}$ и $[0, +\infty)$: степени неограниченно растут по модулю и не пропускают промежуточные значения. По теореме об обратной корни непрерывны на этих образах. В частности, $x^{1/n} \to 0$ при $x \to 0+$: корень непрерывен в нуле и равен там нулю. Рациональные степени строятся из корней и целых степеней; при отрицательном показателе ноль исключается.

Теперь обоснуем показательную функцию без обращения к логарифму и его непрерывности. Пусть $a > 1$ и для рационального $r = p/q$, где $q > 0$, число a^r определено через целую степень и положительный корень. Законы рациональных степеней следуют из единственности положительного корня и законов целых степеней; в частности, $a^{r+s} = a^r a^s$, и a^r строго возрастает по рациональному r.

Для действительного x положим

$$a^x = \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q},\ r < x\}.$$

Множество непусто и ограничено сверху: есть рациональные числа по обе стороны от x, а рациональные степени возрастают. Поэтому супремум существует и положителен. Это построение согласуется с рациональными степенями: если x рационально, все значения в множестве меньше a^x, а числа $a^{x-1/n} = a^x/a^{1/n}$ стремятся к a^x. Последний переход следует из неравенства Бернулли: для $u_n = a^{1/n} - 1 > 0$ имеем $a = (1+u_n)^n \geq 1 + nu_n$, то есть $0 < u_n \leq (a-1)/n$.

Проверим закон сложения показателей. Произведения $a^r a^s = a^{r+s}$ при рациональных $r < x$, $s < y$ входят в множество, задающее a^{x+y}. Их супремум равен произведению положительных супремумов, поэтому $a^x a^y \leq a^{x+y}$. Обратно, всякое рациональное $t < x + y$ можно представить как $t = r + s$ с рациональными $r < x$ и $s < y$: достаточно выбрать рациональное r между $t - y$ и x, затем положить $s = t - r$. Тогда $a^t = a^r a^s \leq a^x a^y$; переход к супремуму даёт обратное неравенство. Значит, $a^{x+y} = a^x a^y$. Если $y > x$, найдётся рациональное r с $0 < r < y - x$. По определению $a^{y-x} \geq a^r > 1$, поэтому $a^y = a^x a^{y-x} > a^x$: функция строго возрастает. Для $0 < a < 1$ определяем $a^x = 1/(1/a)^x$, а $1^x = 1$.

Докажем непрерывность. Установленная оценка $0 < a^{1/n} - 1 \leq (a-1)/n$ вместе с монотонностью даёт при $|h| < 1/n$:

$$a^{-1/n} < a^h < a^{1/n}, \qquad |a^h - 1| \leq \frac{a-1}{n}.$$

Действительно, $1 - a^{-1/n} = (a^{1/n} - 1)/a^{1/n} \leq a^{1/n} - 1$. Для заданных x_0 и $\varepsilon > 0$ выбираем n так, чтобы $a^{x_0}(a-1)/n < \varepsilon$, и берём $\delta = 1/n$. Тогда

$$|a^{x_0+h} - a^{x_0}| = a^{x_0}|a^h - 1| < \varepsilon.$$

При $0 < a < 1$ непрерывность следует из $a^x = 1/(1/a)^x$ и правила частного; при $a = 1$ функция постоянна. При $a > 1$ неравенство Бернулли даёт $a^n \geq 1 + n(a-1) \to +\infty$, а $a^{-n} = 1/a^n \to 0$. Каждое положительное число лежит между некоторыми a^{-n} и a^n; по теореме о промежуточных значениях оно достигается. Следовательно, образ равен $(0, +\infty)$. При $0 < a < 1$ направления меняются, но образ тот же. Показательная функция строго монотонна при $a \neq 1$, поэтому по теореме об обратной $\log_a x$ непрерывен при $x > 0$.

Для $x > 0$ действительную степень основания x теперь можно записать как $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. Объясним равенство: при рациональном показателе оно следует из закона сложения показателей, единственности положительного корня и равенства $e^{\ln x} = x$. При произвольном α берём рациональные $r_n \to \alpha$; обе стороны равенства для r_n переходят к нужным значениям по уже доказанной непрерывности показательных функций по показателю. Она непрерывна как композиция. Если $\alpha > 0$, выберем натуральное n с $1/n < \alpha$. При $0 < x < 1$ монотонность степени по показателю для основания меньше единицы даёт $0 < x^\alpha \leq x^{1/n} \to 0$. Следовательно, продолжение в ноль значением 0 непрерывно.

Обратные тригонометрические функции получаем из непрерывных строго монотонных ветвей. Для $u < v$ формулы разности показывают: синус строго возрастает на $[-\pi/2, \pi/2]$, поскольку

$$\sin v - \sin u = 2\cos\frac{u+v}{2}\sin\frac{v-u}{2} > 0;$$

косинус строго убывает на $[0, \pi]$, поскольку $\cos u - \cos v = 2\sin((u+v)/2)\sin((v-u)/2) > 0$. Их образы равны $[-1, 1]$ по значениям на концах и теореме о промежуточных значениях.

На $(-\pi/2, \pi/2)$ косинус положителен и для $u < v$ имеем $\tan v - \tan u = \sin(v-u)/(\cos u \cos v) > 0$. При подходе к $\pi/2$ слева синус стремится к 1, а положительный косинус к нулю, поэтому тангенс стремится к $+\infty$; у $-\pi/2$ справа синус стремится к -1, а косинус к нулю через положительные значения, поэтому предел равен $-\infty$. На $(0, \pi)$ синус положителен и $\cot u - \cot v = \sin(v-u)/(\sin u \sin v) > 0$, то есть котангенс строго убывает. У 0 справа его предел равен $+\infty$, у π слева — $-\infty$: числитель стремится соответственно к 1 и -1, положительный знаменатель — к нулю. По непрерывности и теореме о промежуточных значениях оба образа равны $\mathbb{R}$. Теорема об обратной даёт непрерывность всех четырёх обратных функций на указанных областях.

Пример с разбором

Для $F(x) = \ln(2 + \sin x)/(1 + x^2)$ имеем $2 + \sin x \geq 1$ и $1 + x^2 \geq 1$. Все действия допустимы на $\mathbb{R}$, поэтому функция непрерывна всюду. В частности, $\lim_{x\to 0} F(x) = F(0) = \ln 2$.

Где легко ошибиться

1. Утверждать непрерывность частного в нуле знаменателя: там выражение не определено.
2. Применять формулу $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ к отрицательному x: для действительного логарифма требуется $x > 0$. Некоторые рациональные степени имеют более широкую область, но это доказывается отдельно.
3. Выводить непрерывность экспоненты из непрерывности логарифма, а затем логарифма из экспоненты: получится круг.

Проверь себя

1. На какой области непрерывна $\arccos(2x)$?
2. Почему $\ln(x^2)$ нельзя объявить непрерывной на всей прямой?

> ▼ **Ответы для проверки**
>
> 1. На $[-1/2, 1/2]$: аргумент арккосинуса должен лежать в $[-1, 1]$.
> 2. При $x = 0$ логарифм не определён; на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ композиция непрерывна.

Опора для устного ответа

Базовые функции → действия и синус → экспонента через Бернулли → обратные функции → области композиций.

32. Первая теорема Больцано-Коши. Вторая теорема Больцано-Коши. Следствие.

Сначала поймём

Непрерывная функция не может перейти от отрицательного значения к положительному, не приняв ноль. Если вместо нуля интересует другая высота, можно вычесть её из функции и снова искать ноль. Так получаем утверждение о любом промежуточном значении.

Как ответить на модуле

Первая теорема. Если $a < b$, f непрерывна на $[a, b]$ и $f(a)f(b) < 0$, существует $c \in (a, b)$, для которого $f(c) = 0$.

Вторая теорема. Если f непрерывна на $[a, b]$ и число C строго между $f(a)$ и $f(b)$, существует $c \in (a, b)$ с $f(c) = C$. Крайние значения $f(a)$ и $f(b)$ достигаются на концах.

Следствие. Образ любого промежутка при непрерывной функции является промежутком: вместе с двумя своими значениями функция принимает и каждое значение между ними. Одноточечный образ допускается. На концах отрезка непрерывность понимается с доступной стороны. Теоремы гарантируют существование точки, но не её единственность.

Почему это верно

Доказательство первой теоремы восстановлено делением пополам. Пусть $f(a) < 0 < f(b)$; обратный порядок знаков рассматривается так же. Делим отрезок пополам. Если значение в середине ноль, доказательство закончено. Иначе оставляем половину, на концах которой значения имеют разные знаки, сохраняя отрицательное слева и положительное справа. Повторяя процесс, либо получаем ноль за конечное число шагов, либо строим вложенные отрезки $[a_n, b_n]$ с $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ и длиной $(b - a)/2^n \to 0$.

По теореме о вложенных отрезках существует общая точка c; поскольку длины стремятся к нулю, $a_n \to c$ и $b_n \to c$. Непрерывность даёт $f(a_n) \to f(c)$ и $f(b_n) \to f(c)$. Переход к пределу в неравенствах даёт $f(c) \le 0$ и $f(c) \ge 0$, откуда $f(c) = 0$. Концы исходного отрезка не являются нулями, значит, $c \in (a, b)$.

Для второй теоремы положим $F(x) = f(x) - C$. Она непрерывна, а её значения на концах имеют разные знаки. Первая теорема даёт $F(c) = 0$, то есть $f(c) = C$.

Для следствия возьмём два значения $y_1 < y_2$ образа промежутка I и любое C между ними. Существуют $x_1, x_2 \in I$ с $f(x_1) = y_1$ и $f(x_2) = y_2$. Порядок аргументов заранее неизвестен; положим $u = \min\{x_1, x_2\}$ и $v = \max\{x_1, x_2\}$. Отрезок $[u, v]$ лежит в I. По второй теореме на нём найдётся точка со значением C. Следовательно, образ содержит все промежуточные значения.

Пример с разбором

Для $f(x) = x^3 + x - 1$ имеем $f(0) = -1$, $f(1) = 1$. Многочлен непрерывен, значит, корень лежит в $(0, 1)$. В середине $f(1/2) = -3/8$, поэтому корень лежит даже в $(1/2, 1)$. Функция строго возрастает, поэтому корень единственный. Это отдельный вывод.

Где легко ошибиться

1. Пропускать непрерывность: ступенька может перескочить через ноль.
2. Считать одинаковые знаки концов доказательством отсутствия корней: x^2 на $[-1, 1]$ опровергает это.
3. Требовать, чтобы образ обязательно был замкнутым отрезком: непрерывная $f(x) = x$ на $(0, 1)$ имеет образ $(0, 1)$.

Проверь себя

1. Какую функцию применить в первой теореме, чтобы найти уровень 5?
2. Может ли непрерывная на промежутке функция принимать ровно два различных значения?

> **▼ Ответы для проверки**
>
> 1. $F(x) = f(x) - 5$, если 5 строго между значениями на концах выбранного отрезка.
> 2. Нет: она обязана принять и все числа между этими значениями.

Опора для устного ответа

Разные знаки → деление пополам → общая предельная точка → сдвиг на C → образ промежутка.

33. Первая теорема Вейерштрасса. Вторая теорема Вейерштрасса.

Сначала поймём

На замкнутом ограниченном отрезке непрерывная функция не только остаётся в конечных пределах: она действительно достигает и самого большого, и самого малого значения. Точная верхняя грань — наименьшая из верхних границ значений — сама по себе не обязана достигаться; вторая теорема добавляет именно достижение.

Как ответить на модуле

Первая теорема Вейерштрасса. Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, ограничена на нём: существует $K > 0$ такое, что $|f(x)| \le K$ для всех $x \in [a, b]$.

Вторая теорема Вейерштрасса. Такая функция достигает на отрезке своего минимума и максимума: существуют $x_m, x_M \in [a, b]$ с $f(x_m) \le f(x) \le f(x_M)$ для всех x отрезка. Точки могут быть концами или внутренними точками; единственность не гарантируется. Обозначив минимум через m, а максимум через M, по теореме о промежуточных значениях получаем $f([a, b]) = [m, M]$.

Почему это верно

Предположим, что f не ограничена. Тогда для каждого натурального n найдётся $x_n \in [a, b]$ с $|f(x_n)| > n$. Последовательность (x_n) ограничена, поэтому по Больцано — Вейерштрассу имеет сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to c$. Из $a \le x_{n_k} \le b$ получаем $c \in [a, b]$. Непрерывность даёт $f(x_{n_k}) \to f(c)$, то есть последовательность значений ограничена. Но $|f(x_{n_k})| > n_k \to +\infty$. Противоречие доказывает первую теорему.

По ней существует конечный супремум $M = \sup f([a, b])$. Предположим, что он не достигается. Тогда $M - f(x) > 0$ во всех точках, и функция

$$\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

непрерывна на отрезке. По первой теореме существует $K > 0$ с $0 < \varphi(x) \le K$. Значит, $M - f(x) \ge 1/K$, или $f(x) \le M - 1/K$ для всех x. Получена верхняя граница меньше супремума, что невозможно. Следовательно, максимум достигается. Применяя тот же результат к непрерывной функции $-f$, получаем достижение минимума.

Все значения лежат в $[m, M]$, а концы достигаются. Если $m < M$, вторая теорема Больцано — Коши на отрезке между точками минимума и максимума даёт каждый промежуточный уровень; их порядок может быть любым. Если $m = M$, функция постоянна. Значит, образ равен $[m, M]$.

Пример с разбором

На $[-1, 2]$ функция $f(x) = x^2$ неотрицательна и принимает 0 при $x = 0$, значит, минимум равен 0. Поскольку $|x| \le 2$, имеем $x^2 \le 4$, и равенство достигается при $x = 2$. Максимум равен 4, образ — $[0, 4]$. Значения только на концах, 1 и 4, не обнаружили бы минимум.

Где легко ошибиться

1. Путать супремум и максимум: для $f(x) = x$ на $(0, 1)$ супремум 1 есть, но максимум не достигается.
2. Искать экстремумы только на концах: минимум квадрата в примере находится внутри.
3. Забывать замкнутость: без неё предел подпоследовательности может оказаться вне области.

Проверь себя

1. Зачем в доказательстве максимума вводится $1/(M - f(x))$?
2. Непрерывная на отрезке функция нигде не равна нулю. Может ли её модуль иметь точную нижнюю грань 0?

> ▼ **Ответы для проверки**
>
> 1. Её ограниченность дала бы общий положительный зазор между $f(x)$ и M, противоречащий определению супремума.
> 2. Нет: непрерывная функция $|f|$ достигает минимума, а он положителен, поскольку нулей нет.

Опора для устного ответа

Неограниченность → подпоследовательность → противоречие → супремум и обратная разность → минимум через $-f$.

34. Равномерная непрерывность. Примеры.

Сначала поймём

При обычной непрерывности допустимую близость аргументов можно выбирать отдельно около каждой точки. При равномерной непрерывности для заданной точности значений нужно выбрать одно расстояние, которое подходит сразу всем парам точек области. Поэтому одна формула может обладать свойством на одной области и не обладать им на другой.

Как ответить на модуле

Функция $f : X \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна на X, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in X : \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Здесь δ зависит от ε, функции и области, но не от конкретной пары x, y. Для обычной непрерывности порядок иной: сначала выбирают точку $a \in X$, затем ε, и лишь потом δ, которая может зависеть от a. Равномерная непрерывность влечёт обычную, но обратное неверно.

Отрицание определения: существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для каждого $\delta > 0$ найдутся $x, y \in X$ с $|x - y| < \delta$ и $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$.

Почему это верно

Зафиксировав в определении равномерной непрерывности $y = a$, получаем обычную непрерывность в любой точке a.

Для $f(x) = x^2$ на $[0, 1]$ все пары удовлетворяют оценке

$$|x^2 - y^2| = |x - y||x + y| \leq 2|x - y|.$$

При любом $\varepsilon > 0$ выбор $\delta = \varepsilon/2$ даёт нужное неравенство для каждой пары. На всей $\mathbb{R}$ та же функция непрерывна, но не равномерно: положим $x_n = n$, $y_n = n + 1/n$. Тогда $|x_n - y_n| = 1/n \to 0$, однако $|f(x_n) - f(y_n)| = 2 + 1/n^2 > 2$. Для фиксированного $\varepsilon_0 = 1$ и любой $\delta > 0$ достаточно взять $n > 1/\delta$: пара нарушит требование.

Зависимость одной найденной локальной δ от точки ещё не доказывает отсутствие равномерности: возможно, существует другой общий выбор. Для отрицательного ответа нужны пары, нарушающие все возможные общие выборы, как выше.

Пример с разбором

Функция $f(x) = x$ равномерно непрерывна на всей $\mathbb{R}$: для любой точности $\varepsilon > 0$ берём $\delta = \varepsilon$. Тогда $|f(x) - f(y)| = |x - y| < \varepsilon$ для любых x, y. Область не ограничена, поэтому замкнутый ограниченный отрезок не является необходимым условием равномерной непрерывности.

Где легко ошибиться

1. Выбирать δ после пары x, y: это нарушает порядок кванторов.

2. Доказывать отсутствие равномерности одной зависящей от точки оценкой: она может быть просто неудачной.
3. Считать непрерывность в каждой точке достаточной: квадрат на $\mathbb{R}$ даёт контрпример.

Проверь себя

1. Допустимо ли выбирать новую δ для каждого значения ε?
2. Для $1/x$ на $(0, 1]$ рассмотри $x_n = 1/n$, $y_n = 1/(n+1)$. Что происходит с расстоянием аргументов и разностью значений?

> **▼ Ответы для проверки**
>
> 1. Да. Недопустимо менять её в зависимости от пары точек при фиксированном ε.
> 2. Расстояние равно $1/[n(n+1)] \to 0$, разность значений равна 1. Поэтому функция не равномерно непрерывна: можно взять $\varepsilon_0 = 1/2$.

Опора для устного ответа

Общая δ → порядок кванторов → квадрат на отрезке → пары для квадрата на прямой → отличие от обычной непрерывности.

35. Теорема Кантора.

Сначала поймём

На замкнутом ограниченном отрезке непрерывность в каждой точке оказывается достаточно сильной, чтобы подобрать одну общую точность по аргументу для всего отрезка. Причина в том, что из любой последовательности точек отрезка можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке того же отрезка. В этой точке можно применить непрерывность.

Как ответить на модуле

Теорема Кантора. Если действительная функция f непрерывна на замкнутом ограниченном отрезке $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на нём. То есть для любого $\varepsilon > 0$ существует одно $\delta > 0$, такое что для всех $x, y \in [a, b]$ из $|x - y| < \delta$ следует $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. На концах предполагается непрерывность с доступной стороны. Для одноточечного отрезка утверждение очевидно.

Доказательство строится от противного: если общего расстояния нет, выбираем всё более близкие пары с фиксированной разницей значений. По теореме Больцано — Вейерштрасса выделяем сходящуюся подпоследовательность первых точек; вторые сходятся к той же точке. Непрерывность приводит к противоречию. Условия теоремы достаточны, но не необходимы.

Почему это верно

Приведём восстановленное доказательство через последовательности. Предположим, что f не равномерно непрерывна. Тогда существует одно $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для каждого натурального n можно выбрать $x_n, y_n \in [a, b]$ с

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, \qquad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Мы подставили в отрицание определения $\delta = 1/n$; число ε_0 при этом остаётся одним и тем же.

Последовательность (x_n) ограничена. По теореме Больцано — Вейерштрасса у неё есть подпоследовательность $x_{n_k} \to c$. Поскольку $a \leq x_{n_k} \leq b$, переход к пределу даёт $c \in [a, b]$: именно здесь нужна замкнутость отрезка.

Возьмём вторые точки с теми же индексами. По неравенству треугольника

$$|y_{n_k} - c| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - c| < \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - c| \longrightarrow 0.$$

Следовательно, $y_{n_k} \to c$. По непрерывности в точке c обе последовательности значений сходятся к $f(c)$. Поэтому $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to 0$. Начиная с некоторого номера эта разность меньше $\varepsilon_0/2$, что противоречит её нижней границе ε_0. Предположение опровергнуто.

Пример с разбором

Функция $\ln x$ непрерывна на $[1, 3]$. По теореме для любой заданной точности значений существует одно расстояние, пригодное для всех пар точек этого отрезка. Теорема обеспечивает существование, но не обязана давать формулу для δ.

Для сравнения, на $(0, 1]$ функция $1/x$ не равномерно непрерывна: пары $1/n$ и $1/(n+1)$ сближаются, но значения отличаются на 1. Их общий предел 0 не входит в область; в нём непрерывность применить нельзя.

Где легко ошибиться

1. Выбирать разные положительные ε для каждого n: отрицание требует одного фиксированного ε_0.
2. Выделять для второй последовательности несогласованную подпоследовательность: нужны те же индексы, чтобы сохранить близость пар.
3. Считать условия необходимыми: $f(x) = x$ равномерно непрерывна на всей $\mathbb{R}$.

Проверь себя

1. Где в доказательстве используются ограниченность и замкнутость отрезка?
2. Почему вторые точки выбранных пар сходятся к тому же пределу, что и первые?

> ▼ **Ответы для проверки**
>
> 1. Ограниченность позволяет выделить сходящуюся подпоследовательность по Больцано — Вейерштрассу; замкнутость гарантирует, что её предел принадлежит отрезку.
> 2. Расстояние между точками пары стремится к нулю; неравенство треугольника оценивает расстояние второй точки до общего предела суммой двух величин, стремящихся к нулю.

Опора для устного ответа

Отрицание и пары → подпоследовательность → предел внутри отрезка → общий предел второй последовательности → противоречие непрерывности.

Перед модулем: что нельзя перепутать

Похожи по словам	В чём различие	Пример, который помогает вспомнить
Верхняя грань и супремум	Верхняя грань — любой общий потолок. Супремум — самый низкий из них.	Для $(0, 1)$ числа 1 и 10 — верхние грани; супремум только 1.
Супремум и максимум	Максимум обязан принадлежать множеству.	У $(0, 1)$ супремум 1, максимума нет.
Неограниченность и бесконечная величина	Неограниченность допускает постоянные возвращения к малым значениям. Бесконечно большая последовательность по модулю в конце концов превосходит любой порог.	$x_{2n} = n$, $x_{2n-1} = 0$ неограничена, но не бесконечно большая.
Ограниченность и сходимость	Сходимость влечёт ограниченность, обратное неверно.	$(-1)^n$ ограничена, но имеет два разных частных предела.
Один частный предел и предел всей последовательности	Один удачный выбор членов не описывает остальные члены.	У последовательности $0, 1, 0, 2, 0, 3, \ldots$ единственный конечный частный предел 0, но сходимости нет.
Строгое неравенство и неравенство пределов	При переходе к пределу строгость может исчезнуть.	$1/n > 0$, но $\lim 1/n = 0$.
Предел и значение в точке	Предел смотрит на соседние точки; значение задаётся отдельно.	Если $f(x) = 1$ при $x \neq 0$, $f(0) = 7$, то предел в нуле равен 1, а непрерывности нет.
Обратная функция и обратная величина	f^{-1} восстанавливает аргумент. $1/f$ делит единицу на значение.	Для $f(x) = 2x$ обратная функция $y/2$, а обратная величина $1/(2x)$.
Обычная и равномерная непрерывность	В первом случае δ может зависеть от выбранной точки. Во втором одно δ подходит всем парам точек области.	x^2 непрерывна на $\mathbb{R}$, но равномерно непрерывна на каждом ограниченном отрезке, а не на всей прямой.
«Одинаковый порядок» и эквивалентность	В принятой здесь классификации отношение стремится к ненулевой константе; для эквивалентности константа должна быть 1.	$2x$ и x одного порядка, но не эквивалентны.

Карта доказательств: какой ход вспомнить

Эта карта помогает восстановить уже понятое доказательство. Если строка остаётся набором слов, вернись к полному вопросу.

Вопрос	Главный ход
5. Единственность предела и ограниченность сходящейся последовательности	Для двух пределов — разделить расстояние между ними. Для ограниченности — отдельно хвост и конечное начало.
8. Монотонная ограниченная последовательность	Взять супремум. Найти один близкий член; монотонность удержит все последующие.
9–10. Число e	Бином даёт рост и границу. Две оценки связывают предел с факториальными суммами. Геометрическая сумма ограничивает остаток.
11. Вложенные отрезки	Супремум левых концов лежит во всех отрезках. Убывающая до нуля длина даёт единственность.
13. Больцано — Вейерштрасс	Делить отрезок пополам и сохранять половину с бесконечно многими членами; выбирать номера по возрастанию.
15. Критерий Коши	Сходимость даёт близость двух членов через предел. В обратную сторону: ограниченность, сходящаяся подпоследовательность, перенос её предела на весь хвост.
17. Гейне и Коши	В одну сторону подставить сходящуюся последовательность. В другую — из отрицания определения выбрать нарушителя при каждом $\delta = 1/n$.
18. Критерий Коши для функции	Каждый путь даёт фундаментальную последовательность значений. Чередование двух путей даёт общий предел; остаётся применить Гейне.
20. Первый замечательный предел	Три площади, зажатие, затем отрицательная сторона.
21. Второй замечательный предел	Целая часть переводит вещественный аргумент к последовательности. Отдельная замена даёт левую сторону.
30. Обратная функция	Близкие значения зажать между значениями в двух точках; строгая монотонность зажмёт их прообразы.
32. Больцано — Коши	Половинное деление сохраняет разные знаки. Общая точка и непрерывность дают ноль. Для уровня C взять $f - C$.
33. Вейерштрасс	Неограниченность противоречит непрерывности на пределе подпоследовательности. Если супремум не достигается, применить ограниченность к $1/(M - f)$.

Вопрос	Главный ход
35. Кантор	Из отрицания равномерности получить близкие пары. Выделить сходящуюся подпоследовательность; обе половины пары придут к одной точке.

Проверка готовности без подсказки

Возьми любой вопрос. Сначала произнеси формулировку, не глядя в текст. Затем ответь на четыре вопроса:

1. Какие объекты и какие условия участвуют? Например, не просто «непрерывная функция», а «функция, непрерывная на замкнутом отрезке».
2. Какое именно заключение получаем? Не добавляй единственность корня в теорему, которая гарантирует только существование.
3. Как связаны основные шаги доказательства? Объясни, зачем выбрана новая точка, подпоследовательность или вспомогательная функция.
4. Что может сломаться, если убрать условие? Приведи контрпример, когда он есть в разборе.

После этого реши самопроверку. Если формулировка ясна, но доказательство теряется, перечитай только его и восстанови на чистом листе. Если не получается пример, вернись к определению: вероятно, одно из его условий ещё не стало понятным. Если всё получается подряд, смени вопрос и позже вернись к нему без предупреждения.

Учебная основа

Названия, порядок и объём вопросов заданы двухстраничным документом «Мат.анализ. Вопросы, 1 модуль, 2027.pdf». Основные определения, порядок рассуждений и способы доказательств сверены с 27 лекциями курса «Булгаков» и сохранёнными расшифровками фотографий конспектов.

Вопросы	Основной материал конспектов
1–7	Грани; последовательности; бесконечно малые и большие; предел; арифметика и сравнение пределов.
8–15	Монотонность; число e; вложенные отрезки; подпоследовательности; Больцано — Вейерштрасс; фундаментальность и Коши.
16–19	Предельные точки; Коши и Гейне; критерий Коши для функции; арифметика пределов функций.
20–23	Замечательные пределы; логарифмические и степенные следствия; сравнение бесконечно малых; односторонние пределы.
24–29	Непрерывность; разрывы; действия; композиция; монотонные функции.
30–35	Обратная функция; элементарные функции; Больцано — Коши; Вейерштрасс; равномерная непрерывность; Кантор.

Курс лекций на bulgakov.live · Раздел подготовки к модулю.

Пояснения терминов, промежуточные шаги, дополнительные примеры, контрпримеры и самопроверка служат учебным расширением конспектов. Это не дословная стенограмма преподавателя. Там, где короткая запись опускала обоснование, в пособии оно раскрыто. В частности, добавлены мост между двумя представлениями числа e, левая сторона второго замечательного предела и полные доказательства первой теоремы Больцано — Коши и теоремы Кантора.

Нумерация первой и второй теорем Больцано — Коши и Вейерштрасса следует этому курсу. Для разрывов отдельно оговорена терминология: некоторые учебники объединяют устранимые разрывы и скачки под названием разрывов первого рода. На модуле удобно сначала назвать точные условия на односторонние пределы, затем термин.